

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE de DOCTORAT d'ETAT ES SCIENCES

présentée

à la FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Gaston CASANOVA

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

*

INVARIANCE ET DETERMINATION DU REEL PHYSIQUE
EN RELATIVITE RESTREINTE ET EN THEORIE DE DIRAC-HESTENES

soutenue le 30 JANV. 1971

Devant la Commission d'Examen

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE de DOCTORAT d'ETAT ES SCIENCES

présentée

à la FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Gaston CASANOVA

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

*

INVARIANCE ET DETERMINATION DU REEL PHYSIQUE
EN RELATIVITE RESTREINTE ET EN THEORIE DE DIRAC-HESTENES

soutenue le 30 JANV. 1971

Devant la Commission d'Examen

Président : M.A. LICHNEROWICZ

Examineurs { Mme M.A. TONNELAT
M. O. COSTA de BEAUREGARD



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556021_0026

A partir d'un principe très général d'invariance, valable aussi bien en mécanique générale qu'en physique microscopique, nous nous proposons, d'une part d'associer d'une façon nouvelle les représentations corpusculaires et ondulatoires des phénomènes quantiques, d'autre part de développer certaines conséquences de l'équation de Dirac en utilisant, après D. Hestenes, l'algèbre réelle d'espace-temps.

Je remercie tout particulièrement M. André LICHNEROWICZ, de l'Académie des Sciences, professeur au Collège de France, qui a bien voulu patronner cette thèse, ainsi que M. David HESTENES, professeur à l'Université de Tempe (U.S.A.) dont les lettres m'ont été un précieux encouragement.

Je remercie également les membres du Jury ainsi que MM. COSTA de BEAUREGARD et Roger BOUDET qui se sont intéressés à ces recherches.

Je n'oublie pas enfin les Editions BELIN qui, dès 1967, ont édité un petit opuscule contenant l'essentiel des premiers résultats, ainsi que Mme KEPENIAN, qui a apporté tous ses soins à l'impression du manuscrit.

Paris, Février 1970.

INTRODUCTION

La possibilité d'une description objective du réel physique implique l'utilisation d'un formalisme mathématique approprié, susceptible d'une interprétation physique en accord avec l'expérience. En conséquence, elle induit corrélativement une large géométrisation des grandeurs de champ d'une part et de ce formalisme d'autre part.

La relativité restreinte a dès longtemps accompli dans cette voie le pas décisif, mais elle limite originellement son étude aux transformations du groupe connexe de Lorentz. Cette objectivité du réel, postulée indépendamment de toute conception purement phénoménologique, doit selon nous être étendue a priori, en mécanique générale comme en mécanique quantique, à des transformations lorentziennes qui retournent l'axe des temps. Or ce renversement de la direction temporelle peut être interprété physiquement de deux façons différentes alors que, d'un point de vue purement analytique, il ne peut être écrit que d'une seule façon $t' = -t$, égalité où les notations se comprennent d'elles-mêmes.

Nous examinerons tout d'abord comment ce problème des diverses orientations possibles de l'espace-temps a été introduit en physique théorique et nous utiliserons pour cela les travaux de M. A. Lichnerowicz^{*)} publiés dans les Annales de l'Institut Henri Poincaré (Vol. 1 n°3, Paris 1964) et qui ont pour objet en particulier de développer une théorie des champs spinoriels sur un espace-temps courbe ainsi qu'une théorie des transformations C,P,T. C'est à ce texte que nous nous référerons constamment dans cette introduction, sauf indication contraire.

I. Orientations de l'espace-temps.

Il est considéré une variété différentiable V_4 de dimension 4

(*) Voir aussi Champs spinoriels et propagateurs en Relativité générale
Bull. Soc. Math. de France, Tome 92, Fasc. 1, Paris 1964.

et de classe C_∞ , la métrique ds^2 de l'espace-temps étant de type hyperbolique normal. Ici V_4 sera l'espace-temps de la relativité restreinte et nous poserons

$$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^0 = ct, ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha \cdot dx^\beta \\ (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \quad \eta_{\alpha\beta} = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta, \eta_{00} = 1, \eta_{AA} = -1 \text{ pour } A = 1, 2, 3.$$

Les repères orthonormés $r = (e_0; e_A)$ sont les éléments d'un fibré principal $E(V_4)$ sur V_4 , le groupe de Lorentz homogène $L(4)$ étant le groupe structural.

Ce groupe complet $L(4)$ admet quatre composantes connexes. On notera $L_0(4)$ le groupe de Lorentz connexe qui admet la transformation identique. La symétrie d'espace ($e_0 \rightarrow e_0, e_A \rightarrow -e_A$) fournit une composante $L_1(4)$ qui définit avec $L_0(4)$ le groupe de Lorentz orthochrone. La symétrie de temps ($e_0 \rightarrow -e_0, e_A \rightarrow e_A$) fournit une composante $L_2(4)$ qui définit avec $L_0(4)$ le groupe de Lorentz orthospacial, et la symétrie totale ($e_0 \rightarrow -e_0, e_A \rightarrow -e_A$) fournit une composante $L_3(4)$ qui définit avec $L_0(4)$ le groupe de Lorentz unimodulaire.

De plus, si $A = (A_\lambda^{\lambda'})$ est une matrice 4×4 ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) appartenant à $L(4)$, sa signature totale δ est ± 1 selon le signe de $\det A$, sa signature temporelle ρ_A est égale à ± 1 selon le signe de $A_0^{0'}$, sa signature spatiale σ_A est définie par le produit $\varepsilon_A \rho_A$ et il en résulte que les quatre composantes de $L(4)$ sont chacune caractérisées par ces signatures.

Il est défini encore sur V_4 une orientation totale ε , pseudoscalaire de carré 1, défini ici par le volume unitaire orienté à quatre dimensions. Nous le noterons ultérieurement ε en algèbre de Clifford. L'espace V_4 admet donc deux orientations totales ε et $-\varepsilon$ étant définies relativement aux repères de $E(V_4)$ par une composante $\varepsilon_r = \pm 1$ et la relation $\varepsilon_r = \varepsilon_{r'}, \varepsilon_A$ étant vérifiée si $r = r'A$.

Enfin, il est défini sur V_4 une orientation temporelle τ par une composante $\tau = \pm 1$ sur $r \in E(V_4)$ de façon que $\tau_r = \tau_{r'}, \varepsilon_A$ et il existe deux orientations temporelles τ et $-\tau$ et deux seulement sur V_4 . Dès lors une orientation spatiale σ sur V_4 est définie par $\sigma = \varepsilon \tau$ et $\sigma_r = \varepsilon_r \tau_r = \pm 1$ de façon que $\sigma_r = \sigma_{r'} \sigma_A$.

2. Groupe Spin(4).

Considérons un ensemble de matrices de Dirac a_α à éléments complexes qui vérifient les relations

$$(1) \quad a_\alpha a_\beta + a_\beta a_\alpha = -2\eta_{\alpha\beta} e,$$

si e est la matrice unité. On sait de plus que ces matrices vérifient les propriétés suivantes :

1°/ Toute matrice 4×4 qui commute avec les a_α est de la forme ae, a appartenant au corps des complexes.

2°/ Si a'_α est un second système de matrices de Dirac vérifiant (1), il existe une matrice Λ régulière sur les complexes et telle que

$$a'_\alpha = \Lambda a_\alpha \Lambda^{-1}$$

3°/ $\det.(a_\alpha) = 1$, trace de $a_\alpha = 0$.

Avec e et les a_α on montre que l'on peut former seize matrices produits qui sont une base d'un espace vectoriel sur le corps des réels ayant une structure Γ d'algèbre de Clifford réelle. Soit Γ^* l'ensemble des éléments réguliers qui forment un corps multiplicatif.

On appellera $\mathcal{M}$ le sous-espace de Γ à quatre dimensions engendré par les a_α et G le sous-groupe de Γ^* défini par les Λ telle que $a/\Lambda \mathcal{M} \Lambda^{-1} \subset \mathcal{M}$ et donc $\Lambda a_\alpha \Lambda^{-1} = A_{\alpha}^{\lambda'} a_{\lambda'}$, λ' indice de sommation, $\det.A = 1$, avec A à éléments réels.

On appellera G le groupe spinoriel Spin(4) et l'on démontre que G est un revêtement d'ordre 2 de $L(4)$.

3. Spineurs.

Du fibré principal $E(V_4)$ des repères orthonormés de V_4 , on déduit par extension un fibré principal $S(V_4)$ de groupe structurel Spin(4) et un point z de $S(V_4)$ est ainsi un repère spinoriel.

Si M est un espace vectoriel de matrices 1×4 à éléments complexes sur lequel opère le groupe Spin(4), on appelle 1-spineur contra-variant*) φ de V_4 une application

(*) Nous écrivons ici φ pour les spineurs contravariants de Dirac au lieu de ψ dans le texte cité.

$$z \rightarrow (z) \text{ de } S(V_4) \text{ dans } M \text{ telle que}$$

$$(2) \quad \varphi(z \wedge^{-1}) = \wedge \varphi(z) \quad \text{avec} \quad \wedge \in \text{Spin}(4).$$

Ces spineurs forment un espace vectoriel sur les complexes, noté S_x . On peut de même définir des 1-spineurs covariants et, en conséquence, des spineurs de type (p,q) c'est-à-dire p fois contravariants et q fois covariants.

4. Equation de Dirac.

A. Lichnerowicz choisit les matrices a_α les quatre matrices réelles suivantes sont trois seulement sont hermitiennes

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices vérifient le système (1). Etant donnée une matrice A , on notera A^* sa conjuguée, A^t sa transposée et $A^\dagger$ son adjointe. Comme $\wedge$ appartient à $\text{Spin}(4)$, de

$$\wedge a_\alpha \wedge^{-1} = A_\alpha^{\lambda'} a_{\lambda'} \quad , \quad \text{on déduit :}$$

$$\wedge^* a_\alpha \wedge^{-1*} = A_\alpha^{\lambda'} a_{\lambda'} \quad , \quad A \text{ étant réelle.}$$

$$\text{D'où} \quad \wedge^* a_\alpha \wedge^{-1*} = \wedge a_\alpha \wedge^{-1} \quad ,$$

$$\text{soit :} \quad (\wedge^{-1} \wedge^*) a_\alpha (\wedge^{*-1} \wedge) = a_\alpha .$$

Comme $\wedge^{-1} \wedge^*$ commute avec les a_α , il existe un scalaire $a_\wedge$ dépendant continûment de $\wedge$ tel que $\wedge^* = a_\wedge \wedge$ et en passant aux déterminants : $(a_\wedge)^4 = 1$ soit $a_\wedge = 1, -1, i, -i$. Comme $a_\wedge$ dépend continûment de $\wedge$, il conserve la même valeur sur chaque composante connexe de $\text{Spin}(4)$, et les matrices $\wedge = e$, $\wedge = a_0$, $\wedge = a_1 a_2 a_3$ qui correspondent respectivement à $L_0(4)$, $L_1(4)$ et $L_2(4)$ étant réelles, on a $a_\wedge = 1$ pour toutes les composantes de $L(4)$.

$$\text{Ainsi} \quad \wedge^* = \wedge$$

et, par ce choix de matrices a_α , les éléments $\wedge$ de $\text{Spin}(4)$ sont des matrices réelles.

Si maintenant φ est un 1-spineur précédent :

$$\varphi(z \wedge^{-1}) = \wedge \varphi(z)$$

ou, en passant aux complexes conjugués :

$$\varphi^*(z \wedge^{-1}) = \wedge \varphi^*(z)$$

qui prouve qu'il existe une application antilinéaire C de S_x sur lui-même telle que

$$\varphi \rightarrow C \varphi = \varphi^C = \varphi^*.$$

On voit que C^2 est l'application identique et l'on appelle C la conjugaison de charge.

Sur V_4 muni de l'orientation totale $\mathcal{E}$, A. Lichnerowicz introduit le spineur

$$(3) \quad \xi = i \mathcal{E} a^0 a^1 a^2 a^3$$

avec $a^\alpha = \eta_{AA} a^\alpha$. Etant donné le choix des a^α ,

$$\xi^+ = \xi \quad \text{et} \quad \xi^* = -\xi \quad \text{car} \quad \xi \quad \text{est imaginaire pure.}$$

En outre, on voit aisément que

$$\xi a^\alpha + a^\alpha \xi = 0 \quad \text{et que} \quad \xi^2 = e \quad (4).$$

En désignant par B l'automorphisme de S_x défini par

$$B \varphi = \xi \varphi \quad (5),$$

on obtient : $CB \varphi = (\xi \varphi)^* = \xi^* \varphi^* = -\xi \varphi^* = -\xi C \varphi$.

Or d'après (5) : $BC \varphi = \xi C \varphi$ et $BC = -CB$, puisque

$$CB \varphi = -BC \varphi.$$

Or, d'après (4), B^2 est l'application identique. Donc B admet les valeurs propres $+1$ et -1 , et S_x peut être décomposé en une somme directe $S_{x+} \oplus S_{x-}$ des sous-espaces propres S_{x+} et S_{x-} de B . On notera φ_+ si $\varphi \in S_{x+}$ et φ_- si $\varphi \in S_{x-}$. Un spineur φ quelconque se décompose en

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- \quad (6).$$

Or $B \varphi_+ = \varphi_+$ et $B \varphi_- = -\varphi_-$ et $B \varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ (7).

D'où l'on déduit

$$\varphi_+ = \frac{1+B}{2} \varphi \quad \text{et} \quad \varphi_- = \frac{1-B}{2} \varphi \quad (8)$$

De plus,

$$CB \varphi_+ = C \varphi_+$$

et donc $B(C \varphi_+) = -CB \varphi_+ = -C \varphi_+$ (9)

qui montre que $C \varphi_+$ appartient à S_{x-} . Ainsi C échange S_{x+} et S_{x-} .

Soit maintenant $P \varphi = a^\alpha \nabla_\alpha \varphi$, l'opérateur de Dirac où ∇_α est la dérivation covariante.

La conjugaison de charge C commute avec ∇_α et, comme les a^α sont réelles,

$$CP = PC.$$

Par contre P échange les types positif et négatif des spineurs car

$$BP \varphi = \xi a^* \nabla_\alpha \varphi = -a^\alpha \xi \nabla_\alpha \varphi \text{ d'après (4) et donc :}$$

$$BP \varphi = -a^\alpha \nabla_\alpha (\xi \varphi) = -PB \varphi \text{ c'est-à-dire que}$$

$$BP = -PB,$$

$$\text{et donc} \quad B(P \varphi_+) = -PB \varphi_+ = -P \varphi_+$$

qui montre que $P \varphi_+ \in S_{x-}$.

L'équation de Dirac dans le cas du champ libre s'écrit :

$$(5) \quad (P - \mu) \varphi = 0 \text{ si } \mu \text{ est la constante de masse.}$$

Elle est invariante sous conjugaison de charge puisque C commute avec P , mais par contre

$$(P - \mu) (\varphi_+ + \varphi_-) = P \varphi_+ - \mu \varphi_+ + P \varphi_- - \mu \varphi_- = 0,$$

ce qui exige à la fois, puisque S_{x+} et S_{x-} sont en somme directe :

$$P \varphi_+ = \mu \varphi_+ \quad \text{et} \quad P \varphi_- = \mu \varphi_- \quad (6).$$

Il en résulte que ni φ_+ ni φ_- ne sont stables par P et que (6) ne sépare pas S_{x+} et S_{x-} si $\mu \neq 0$, c'est-à-dire encore que toute solution de (5) est alors de la forme $\varphi_+ + \varphi_-$.

Dans le cas $\mu = 0$ (neutrinos) il y a séparation de φ_+ et de φ_- par P et en utilisant également C on peut associer quatre fonctions d'onde distinctes aux quatre neutrinos et antineutrinos (A. Lichnerowicz et F. Moret-Bailly, Comptes rendus Acad.Sci.Paris, t.257, 1963, p. 3542).

L'interprétation physique de la conjugaison C exige que l'on connaisse l'action de C sur le signe de l'énergie non potentielle en particulier en l'absence de champ, mais de toute façon il sera nécessaire d'interpréter physiquement les solutions à énergie négative de l'équation (5) de Dirac et, lorsque la solution représentera un mélange

de particules et d'antiparticules, d'introduire une grandeur décrivant les proportions du mélange.

C'est pourquoi il nous paraît nécessaire d'élaborer une théorie des trous indépendamment, d'une part, de toute équation d'évolution et valable, d'autre part, en mécanique générale où les équations du mouvement comportent aussi des solutions à énergie négative. Dans ce but, nous commencerons notre étude par des considérations très générales sur l'invariance des lois physiques dans le retournement de l'axe temporel et sur la signification physique de ce retournement. Nous serons ainsi conduits à une interprétation de l'équation de Dirac qui introduira un angle β de D. Hestenes décrivant les proportions du mélange particules-antiparticules, et à une étude des développements possibles de la théorie de D. Hestenes en utilisant le formalisme très commode de l'algèbre réelle d'espace-temps.

PREMIERE PARTIE

GENERALITES SUR LES DESCRIPTIONS

DES PHENOMENES PHYSIQUES

L'espace-temps utilisé est celui de Minkowski et les coordonnées sont désignées par $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ict$. Un système physique est caractérisé par des variables de position, $x, y, \dots$ et des variables d'état, m désignant la masse, $\vec{p} = m\vec{v}$ l'impulsion, W l'énergie, $\vec{F}$ la force d'espace, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ le champ électromagnétique, $e^- = -e$ la charge du négaton, $e^+ = e$ celle du positon, c la vitesse de la lumière. Nous dirons en outre, ce qui sera commode, qu'un système physique est absolument localisé lorsqu'il est localisé dans un état bien déterminé.

Une loi physique pourra être écrite pour un observateur O d'une base B ($Oxyz$) sous la forme d'un système d'équations (ou d'inéquations) (1) : $F_i(x, y, \dots, u_j, \dots) = 0$ avec $i = 1, 2, \dots, p$, où les u_j sont les variables d'état. Nous supposons, en accord avec la relativité restreinte, que cette loi peut être écrite sous forme tensorielle de telle sorte que tout changement de la base orthonormée B en une base orthonormée B' ($O'x'y'z't'$) induit pour les variables d'état qui sont des composantes de tenseurs (ou de spineurs) une transformation linéaire $u'_j = a^1_j u_1 + \dots + a^p_j u_p$ avec des a convenables. Or l'objectivité de la loi physique se traduit par l'invariance formelle des équations (1) de telle sorte que pour un observateur O' de la base B' les équations (1) s'écrivent :

$$F_i(x', y', \dots, u'_j, \dots) = 0 \quad (2),$$

$$\text{ou encore} \quad F_i(x', y', \dots, a^1_j u_1 + \dots + a^p_j u_p, \dots) = 0$$

ce qui montre que les équations (1) admettent un double système de solutions pour les grandeurs d'état. Ces deux systèmes correspondent en principe à la même réalité physique décrite différemment dans deux bases.

différentes. On sait qu'en relativité cette invariance est postulée pour les rotations propres de la base, mais O et O' sont alors en mouvement relatif et donc nécessairement distincts. Nous nous proposons essentiellement d'examiner le cas où O et O' sont au repos relatif.

I. Les deux genres de rotations impropres d'espace-temps

Lorsque les bases B et B' se correspondent dans une symétrie de temps

$$x' = x, y' = y, z' = z, t' = -t \quad (3)$$

par exemple, on peut interpréter de deux façons différentes cette même transformation analytique.

Si O et O' sont deux observateurs réels, ils ont même direction passé-avenir et il en résulte que O et O' font deux conventions différentes, car, pour O , la direction passé-avenir coïncide par exemple avec la direction de son axe des temps tandis que, pour O' , ces deux directions sont opposées. On peut encore dire que les cônes d'avenir de O et de O' coïncident mais qu'ils correspondent à des temps de signes contraires (figure I).

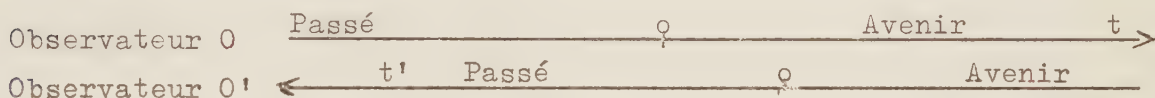


Figure I

Les deux observateurs O et O' ne diffèrent donc que par leur façon de compter les temps, O' utilisant "le compte à rebours".

Nous obtenons ainsi un premier genre de rotations impropres d'univers, $x' = -x, y' = y, z' = z, t' = -t$ par exemple, en utilisant ces deux observateurs réels O et O' (ou le même observateur O faisant successivement deux conventions différentes). Ici l'invariance postulée des lois physiques induit sur les masses une transformation $m' = -m$ qui fait correspondre à un événement $M(t)$ des énergies de signes contraires pour O et pour O' , mais une telle invariance ne s'impose nullement d'un point de vue purement logique, ni dans une symétrie de temps, ni dans une rotation impropre, puisque O et O' font des conventions différentes pour décrire la même réalité physique.

Introduisons par contre au moins provisoirement un observateur $\bar{O}$ purement fictif qui retourne à la fois son axe des temps et la direction passé-avenir, de telle sorte que O et $\bar{O}$ ont des cônes d'avenir opposés par leur sommet commun (figure 2).

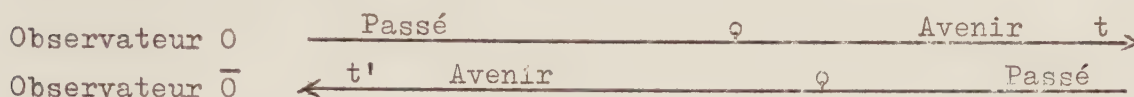


Figure 2

Cette introduction de l'observateur $\bar{O}$ nous conduira logiquement à énoncer un principe d'invariance relatif à la description du réel physique, mais $\bar{O}$ ne figurera pas explicitement dans l'énoncé du principe de telle sorte que son intervention n'est pas absolument nécessaire. Ce dernier point de vue est, à notre avis, tout à fait dogmatique et n'a pas notre entière sympathie mais le fait qu'il puisse être pris en considération permet d'attribuer à $\bar{O}$ le sens, d'ailleurs suggestif, d'un "catalyseur logique".

Les observateurs $\bar{O}$ et O font désormais les mêmes conventions puisque pour chacun d'eux la direction passé-avenir coïncide avec la direction de leur axe des temps, de telle sorte qu'ils peuvent logiquement donner un sens objectif à l'invariance formelle des lois physiques en les écrivant de la même façon. Cette invariance induit une transformation des variables d'état telle que $m' = -m$. Il en résulte qu'un événement $M(t)$ à énergie positive pour O et qui a lieu dans un avenir est à énergie négative pour $\bar{O}$ et a lieu dans son passé. Or, en mécanique classique et relativiste, seuls les événements à énergie positive et se produisant dans le présent ou l'avenir de l'observateur sont observables, les événements à énergie négative étant toujours inobservables, si bien que $M(t)$ est observable pour O et inobservable pour $\bar{O}$, ce qui est satisfaisant puisqu'il a eu lieu dans le passé de $\bar{O}$, mais un événement réel doit être observable, en vertu même de son objectivité, à la fois pour O et pour $\bar{O}$, ce qui exige qu'il ait lieu à l'instant de leur présent commun ($t = c$). Il en résulte que le retournement des temps à la seconde manière ici envisagé ne peut avoir qu'une signification instantanée, à l'origine commune des temps pour O et pour $\bar{O}$,

cette origine commune pouvant d'ailleurs être choisie arbitrairement.

II. Invariance du réel physique

Cette invariance, et donc l'objectivité, du réel physique exige davantage que l'invariance des seules équations ; en effet, deux observateurs au repos relatif qui font les mêmes conventions avec les mêmes unités de mesure doivent utiliser les mêmes valeurs numériques pour décrire les mêmes phénomènes physiques.

Il en est ainsi en relativité pour tous les observateurs des systèmes propres qui mesurent pour un électron la même masse, la même charge, le même spin total. Deux de ces bases propres ainsi équivalentes se déduisent l'une de l'autre par une rotation propre.

D'une façon générale, une rotation de Lorentz R^+ conserve le cône d'avenir de l'observateur car R^+ appartient au groupe connexe $L_0(4)$, et une rotation impropre R^- est un produit de la forme

$$R^+ S_1 S_2 ,$$

S_2 étant la symétrie (3) de temps et S_1 une symétrie d'espace par rapport à un plan euclidien. Si $\vec{Ox}$ est choisi suivant la perpendiculaire à ce plan on obtient la rotation canonique

$$(4) \quad x' = -x , \quad y' = y , \quad z' = z , \quad t' = -t .$$

On obtiendrait évidemment des formules analogues en choisissant $\vec{Oy}$ et $\vec{Oz}$ suivant la perpendiculaire à ce plan de symétrie.

Pour généraliser la notion de bases équivalentes, nous remarquons que deux bases B et B' d'espace-temps symétriques, c'est-à-dire qui se déduisent l'une de l'autre dans une symétrie d'espace ou de temps ne peuvent être équivalentes puisqu'elles sont de sens contraire. Exiger que les deux observateurs, O de B et O' de B' , obtiennent les mêmes résultats de mesure serait aussi peu rationnel que d'exiger ces mêmes résultats de deux observateurs au repos relatif utilisant deux systèmes différents d'unités. Une semblable invariance dans une symétrie traduirait une propriété de parité du système physique, mais on ne peut préjuger de sa réalité.

Il en va par contre différemment d'un point de vue théorique lorsque les bases B et B' sont de même sens, c'est-à-dire lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre dans une rotation quelconque. Le groupe de transformation utilisé est donc le groupe de Lorentz unimodulaire, caractérisé par la signature totale $\varepsilon_A = 1$ de la matrice A , définie dans l'introduction. Ce groupe a deux composantes, $L_0(4)$ caractérisée par $\rho_A = \sigma_A = 1$ et $L_3(4)$ caractérisée par $\rho_A = \sigma_A = -1$. On voit encore que les bases envisagées ont même orientation totale puisque $\varepsilon_A = 1$, mais qu'elles se décomposent en deux sous-ensembles ayant des orientations temporelles opposées, et c'est l'interprétation physique de cette invariance théorique qu'il nous faut examiner maintenant.

Transformation des grandeurs d'état

Ces transformations sont écrites dans la symétrie (4) mais l'écriture vectorielle d'espace utilisée montre en définitive que les résultats sont indépendants du plan euclidien de symétrie choisi. Il suffit de changer les signes des composantes de tenseurs qui contiennent un nombre impair de fois les indices 1 et 4, pour obtenir les transformations souhaitées. D'où :

$$\vec{p}' = \vec{p} , \quad m' = -m \quad (5)$$

puisque $(\vec{p}, icm)$ est en relativité un vecteur d'espace-temps. On remarque en outre que $\vec{v}' = -\vec{v}$.

L'invariance relativiste des équations de Maxwell montre que les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ ont pour composantes celles d'un tenseur antisymétrique de rang 2, noté F_{ij} , d'où dans l'univers de Minkowski :

$$\begin{aligned} E'_x = iF'_{14} &= iF_{14} = E_x , & E'_y &= iF'_{24} = -iF_{24} = -E_y , \\ E'_z &= iF'_{34} = -iF_{34} = -E_z . \\ H'_x = F'_{23} &= F_{23} = H_x , & H'_y &= F'_{31} = -F_{31} = -H_y , & H'_z &= F'_{12} = -F_{12} \\ &= -H_z , \text{ soit } \vec{E}' = -\vec{E} , & \vec{H}' &= -\vec{H} \end{aligned} \quad (6).$$

L'invariance de l'équation fondamentale de la dynamique $\vec{F} dt = d\vec{p}$, compte-tenu de (5), conduit à

$$\vec{F}' = -\vec{F} \quad (7).$$

L'invariance de l'expression de la force finie de Lorentz

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e\vec{v}}{c} \times \vec{H},$$

où $\times$ représente le produit vectoriel ordinaire conduit à

$$e' = e \quad (8).$$

L'invariance des équations de Lorentz pour le négaton implique $q' = -q$ si q est la densité de charge, d'où

$$du' = -du \quad (9)$$

pour la transformation du volume élémentaire d'espace du . D'ailleurs on peut former avec le vecteur $dx, dy, dz, icdt$, le trivecteur $icdydzdt$, $icdx dzdt$, $icdx dydt$, $dx dy dz$ qui se transforme comme son dual et donc comme un vecteur. La composante de temps $du = dx dy dz$ est précisément le volume élémentaire à temps constant ($dt = 0$) donc le volume élémentaire d'espace, ce qui est bien en accord avec (9).

La mécanique ondulatoire introduit un vecteur densité de spin $\vec{S} (s_x, s_y, s_z, s_4)$. Donc $\vec{S}' = \vec{S}$ (10)

De plus, dans le système propre, $s_4 = 0$ et l'on pose dans ce système :

$$S_x = \int_{\Omega} s_x du, \quad S_y = \int_{\Omega} s_y du; \quad S_z = \int_{\Omega} s_z du,$$

Ω étant le volume et $\vec{S} (S_x, S_y, S_z)$ le vecteur de spin. De (9) et (10) on déduit :

$$\vec{S}' = -\vec{S} \quad (11)$$

pour la transformation du spin.

Enfin, l'invariance relativiste de $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - c^2 s_4^2$ permet de poser dans le système propre

$$s_0 = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \quad \text{et} \quad S_0 = \int_{\Omega} s_0 du,$$

S_0 désignant le spin total. En utilisant (9), on obtient :

$$S'_0 = -S_0 \quad (12).$$

On peut aussi remarquer que les formules (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12) sont encore valables si l'on utilise la rotation :

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad t' = -t \quad (13)$$

qui a l'avantage de traiter symétriquement les trois axes d'espace car (13) n'est qu'un produit de trois rotations du type canonique (4).

Enoncé du principe d'invariance

Etant donné un état E à énergie positive pour O ($m > 0$) et défini par (14) $E(e^-, m, \vec{p}, \vec{v}, \vec{F}, \vec{E}, \vec{H}, q, \Omega, \vec{s}, S_0)$ les lettres ayant les significations précédentes, l'état $\bar{E}$ obtenu en transformant les variables d'état dans une rotation impropre sera dit conjugué de l'état E , soit :

$$(15) \quad \bar{E} = \bar{E}(e^-, -m, \vec{p}, -\vec{v}, -\vec{F}, -\vec{E}, -\vec{H}, -q, -\Omega, \vec{s}, -S_0)$$

L'invariance ne peut être obtenue en choisissant E tel que $\bar{E} = E$ car cette égalité impliquerait $m = -m$, $\vec{F} = -\vec{F}$, $\vec{E} = -\vec{E}$ et donc $m = 0$, $\vec{F} = \vec{E} = \vec{H} = \vec{0}$, $q = 0$ c'est-à-dire l'absence complète de système physique. Il est donc nécessaire de supposer que le système envisagé se trouve pour O à la fois dans l'état E et dans l'état $\bar{E}$.

En mécanique générale (classique ou relativiste) où la localisation est absolue, ces deux états doivent évidemment être localisés au même point $M(x, y, z, t)$ de telle sorte que $\bar{E}$ ne peut être solution des équations d'évolution si E est solution, sauf si $-\vec{v} = \vec{v}$, c'est-à-dire si $\vec{v} = \vec{0}$ et si donc O est constamment l'observateur du système propre. Dès lors, les états conjugués sont respectivement les états E_0 et $\bar{E}_0$ définis par

$$E_0(e^-, m_0, \vec{E}_0, \vec{H}_0, q_0, \Omega_0, \vec{s}_0, S_0) \quad (14 \text{ bis})$$

$$\bar{E}_0(e^-, -m_0, -\vec{E}_0, -\vec{H}_0, -q_0, \Omega_0, \vec{s}_0, -S_0) \quad (15 \text{ bis})$$

les autres variables étant nulles.

L'équation fondamentale de la dynamique $\vec{F} dt = d\vec{p}$ est satisfaite pour $\bar{E}_0$ et pour E_0 puisque $\vec{F} = \vec{p} = \vec{0}$ constamment, ainsi que les équations de Maxwell pour les négatons :

$$-1/c \partial \vec{H} / \partial t = \text{rot} \cdot \vec{E}, \quad 1/c \partial \vec{E} / \partial t = \text{rot} \cdot \vec{H} - q\vec{v}/c, \quad \text{div} \cdot \vec{H} = 0, \quad \text{div} \cdot \vec{E} = q$$

puisque $\vec{v} = \vec{0}$ dans le système propre.

On énoncera :

A tout instant un système physique existe pour l'observateur O de son système propre dans deux états conjugués E_O et $\bar{E}_O$ à énergies opposées. L'état à énergie positive est seul observable et l'état conjugué inobservable. De plus, la relation de conjugaison est symétrique.

Ainsi l'observateur $\bar{O}$ a disparu dans l'énoncé du principe qui ne fait intervenir que O et la base propre B_O (Oxyzt). Naturellement, l'ensemble $E_O, \bar{E}_O$ est invariant dans une rotation impropre instantanée, c'est-à-dire que $\bar{O}$ décrit le système physique de la même façon que O.

Enfin l'existence des états E_O et $\bar{E}_O$ ayant lieu pour O à tout instant un observateur O' pour lequel E_O est en mouvement ainsi que la base tangente B_O considère que le système physique est dans l'état E défini par (14) tandis que l'état $\bar{E}_O$ se déplace également pour lui O' avec la vitesse v et se trouve ainsi dans un état E' tel que

$$(16) \quad E' = E' (e^-, -m, -\vec{p}, \vec{v}, -\vec{F}, -\vec{E}, -\vec{H}, -q, -\Omega, \vec{s}, -S_O).$$

Cet état $E' \neq \bar{E}$ vérifie comme E les équations fondamentales de la mécanique générale ou les équations de Maxwell-Lorentz, comme on le vérifie aisément, et l'on a ainsi mis en évidence un double système de solutions, mais les états E et E' ne sont pas conjugués c'est-à-dire qu'ils ne se correspondent dans une rotation impropre que dans le système propre où $E'_O = \bar{E}_O$, si bien qu'ils deviennent chacun les états conjugués E_O et $\bar{E}_O$.

Invariance et localisation absolue.

Les états à énergie négative sont ordinairement écartés en mécanique générale pour la raison suivante. L'évolution d'un système physique s'effectuant de façon continue, un état à énergie positive ne peut se transformer en un état à énergie négative puisque l'intervalle $(-m_O c^2, m_O c^2)$ ne peut être occupé par aucun état du système, mais il n'est toutefois pas expliqué ainsi pourquoi tous les états sont à énergie positive. Cette circonstance résulte évidemment du fait que seule ces états sont observables, les états à énergie négative étant

étant inobservables. L'introduction du principe d'invariance permet d'interpréter les solutions à énergie négative des équations et cette introduction peut être soutenue d'une façon cohérente en mécanique générale, mais il est bien certain qu'elle ne présente d'intérêt que si on peut interpréter dans certains cas, d'une certaine façon, ces états à énergie négative.

Il nous paraît naturel de poser comme condition que seule une lacune d'un tel état, c'est-à-dire son absence peut être observable puisque sa présence est toujours inobservable. Or, lorsque le système physique est absolument localisé, l'état à énergie négative est à chaque instant unique comme l'état conjugué à énergie positive : son absence implique donc l'absence de cet état conjugué à énergie positive, c'est-à-dire que cette absence implique l'absence du système physique lui-même et que l'on se trouve ainsi en présence d'un état vide.

Ainsi l'introduction des états à énergie négative en mécanique générale où la localisation est absolue ne peut rien apporter de nouveau sur le comportement observable des systèmes physiques. Il est donc superflu de les considérer et suffisant de se borner à la description et à l'étude des états à énergie positive à l'aide du seul observateur réel 0, c'est-à-dire de renoncer en fait au principe d'invariance, mais il importait cependant de souligner la possibilité théorique de le développer sans contradiction.

Il est ainsi nécessaire pour interpréter ces états à énergie négative de compléter le principe d'invariance par un principe d'indétermination, soit des variables d'état, soit des variables de position, soit de ces deux ensembles de variables.

Théorie des trous, Antiparticules.

Ainsi complété, le principe d'invariance ne sera donc utilisé qu'en physique microscopique où est assurée l'existence d'un au moins des ensembles d'indétermination précédents.

Soit, décrit dans son système propre, un état possible A_i^0 à

énergie négative, localisé en un point de l'ensemble des localisations possibles. Cet état A_i^0 est conjugué d'un état a_i^0 localisé et à énergie positive ; nous dirons que a_i^0 est l'état d'un micro-objet ou particule q pour traduire le fait de la localisation.

Si l'état possible A_i^0 vient à disparaître, l'état a_i^0 disparaît également mais non le micro-objet qui possède encore un ensemble non-vide de localisations possibles, ou d'états à énergie positive possibles. Nous dirons que la disparition de l'état A_i^0 équivaut à l'apparition d'une lacune L' à énergie négative et d'une lacune conjuguée L à énergie positive. Or L est inobservable puisqu'état vide et donc L' est observable. De plus L' représente un état $\bar{a}_i^0$ qui disparaît si on lui superpose A_i^0 . On écrira, $\emptyset$ représentant l'état vide :

$$(17) \quad \bar{a}_i^0 + A_i^0 = \emptyset$$

Comme on obtient également l'état vide en superposant à A_i^0 l'état obtenu en changeant dans A_i^0 le signe de toutes les grandeurs d'état, on obtient $\bar{a}_i^0$ à partir de a_i^0 en appliquant la règle suivante :

On remplace a_i^0 , donné par 14bis, par l'état conjugué $a_{i-}^0 = A_{i-}^0$, donné par 15bis et déduit de a_i^0 dans une rotation impropre instantanée, et l'on change le signe de toutes les variables d'état pour obtenir

$$\bar{a}_{i-}^0 = -A_{i-}^0, \text{ soit } \bar{a}_i^0 = (e^+, m_0, q_0, \Omega_0, \vec{s}_0, S_0) \text{ avec } e^+ = -e^-.$$

Ainsi l'interprétation des états à énergie négative a lieu dans le système propre à $t = 0$ et elle fait intervenir le seul aspect corpusculaire. De plus, l'interprétation des tenseurs densitaires de l'état A_i^0 se fait en intégrant dans des volumes d'espace négatifs puisque A_i^0 est associée d'après (15bis) à des volumes négatifs. On changera donc le signe de toutes les grandeurs d'espace qui, comme on le sait, ont en théorie de Dirac une signification physique précise en intégrant les densités dans des volumes positifs et l'on obtiendra ainsi les grandeurs de l'état $\bar{a}_i^0$, état d'un micro-objet $\bar{q}$, antiparticule de q .

Nous distinguerons q^+ de q^- par le signe de la charge dont la valeur absolue sera toujours celle de l'électron et q_0 désignera une particule neutre. Ainsi e^- désignera à la fois la charge du négaton et

le négaton lui-même, tandis que e^+ désignera aussi le positon.

L'équation (17) qui définit la particule conjuguée à partir de q doit être invariante dans une rotation impropre instantanée comme toute équation fondamentale. Donc :

$$\bar{a}_i^{\prime 0} + A_i^{\prime 0} = \emptyset ,$$

puisque l'état vide est invariant.

Or $a_i^0 = A_i^{\prime 0}$ et $a_i^{\prime 0} = A_i^0$. D'où :

$$\bar{A}_i^0 + a_i^0 = \emptyset$$

qui exprime que $\bar{q} = q$, c'est-à-dire que q est réciproquement l'antiparticule de $\bar{q}$.

Par contre, on a évidemment $q \neq \bar{q}$ si q est chargé mais si $q = q_0$, les particules q_0 et $\bar{q}_0$ ont même masse et même spin total. Toutefois il se peut qu'elles aient des durées de vie différentes, l'instantanéité de la rotation impropre ne pouvant nullement nous renseigner à ce sujet ; on posera donc en principe $q_0 \neq \bar{q}_0$, l'égalité exigeant toujours une justification.

L'existence des antiparticules étant prouvée expérimentalement, aussi bien pour les fermions (électrons, protons, neutrons...) que pour les bosons (photons, mésons...) et le postulat (17) en rendant compte en toute généralité sans intervention d'une équation particulière d'évolution, cette existence, incompatible avec la localisation absolue, sépare le domaine de la mécanique générale du domaine de la mécanique quantique, le macroscopique du microscopique.

Interactions entre particules

Nous appliquons la théorie précédente aux interactions entre particules en considérant que les interactions se produisent lorsque les particules sont suffisamment proches les unes des autres pour qu'on puisse les considérer comme au repos relatif pendant la brève durée de l'interaction, de telle sorte qu'il existe pour les particules q_i de l'état initial et pour les particules $q_j^{\prime}$ de l'état final un même sys-

tème propre.

Pour appuyer cette hypothèse, nous citerons un texte de M. Louis de Broglie^{*)}.

"Le monde micro-physique, c'est-à-dire la réalité physique à l'échelle des atomes et des corpuscules, échappe à nos observations directes. Comment le connaissons-nous ? Il semble qu'on doive répondre à cette question en disant : nous le connaissons uniquement par l'intermédiaire de "localisations corpusculaires observables", c'est-à-dire de phénomènes où un corpuscule, agissant à l'échelle microphysique, déclenche par une réaction en chaîne un effet observable...".

"C'est toujours et, me semble-t-il, uniquement ce processus de "localisation corpusculaire observable" qui nous permet de connaître ce qui se passe à l'échelle microphysique. La réaction en chaîne déclenchée par l'arrivée du corpuscule est une sorte de processus amplificateur, réalisant une amplification en étendue, qui nous permet d'observer quelque chose qui s'est passé à une échelle inaccessible à nos sens.

La trace laissée par le passage d'une particule dans une chambre de Wilson constitue un exemple de localisations corpusculaires observables se produisant successivement tout le long d'une trajectoire. Dans le gaz sursaturé de vapeur de la chambre de Wilson, l'électron entre successivement en interaction de proximité avec une série d'atomes du gaz en les ionisant et chacune de ces ionisations déclenche un processus en chaîne qui aboutit à la formation d'une petite gouttelette d'eau. Le chapelet des gouttelettes d'eau ainsi formées dessine dans le gaz la forme de la trajectoire. On obtient ainsi une interprétation immédiate et intuitive du phénomène observé. Une explication analogue s'applique à ce qui se passe dans une émulsion photographique ou dans une chambre à bulle quand elles permettent de déceler le passage d'une particule...

*) Louis de Broglie. Etude critique des bases de l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire. Gauthier-Villars, Paris, 1963.

"J'ajouterai, sans développer entièrement ce point, que même dans l'action d'un photon sur une particule, on doit considérer cette action comme extrêmement localisée. Cette idée que la localisation corpusculaire observable, seule fenêtre qui nous soit ouverte sur le monde microphysique, est liée à une très grande proximité entre le corpuscule déclenchant le phénomène observable et une autre unité du monde microphysique me paraît essentielle".

Nous écrirons la réaction :

$$\sum q_i \longrightarrow \sum q'_j \quad (i = 1, 2, \dots, n ; j = 1, 2, \dots, p)$$

et en passant aux états :

$$\sum a_i \longrightarrow \sum a'_j \quad (18)$$

soit, en appliquant le principe d'invariance, d'une façon équivalente :

$$\sum A_i \longrightarrow \sum A'_j \quad (19)$$

Ecrivons maintenant en toute généralité, absence de réaction comprise, l'interaction des $\bar{q}_i$ sous la forme :

$$\sum \bar{q}_i \longrightarrow \sum q''_k \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (20)$$

soit avec les états :

$$\sum \bar{a}_i \longrightarrow \sum a''_k .$$

Superposons les membres respectifs de (19) et de (20) en tenant compte de l'équation fondamentale (17); on obtient

$$\emptyset = \sum a''_k + \sum A'_j \quad (21) ,$$

et le membre de droite de (21) ne peut être que l'état vide, donc

$$a''_k = \bar{a}'_j \text{ pour tout } k = 1, 2, \dots, r \text{ et, ainsi } p \gg r .$$

En outre, on ne peut avoir $p > r$ car

$\emptyset \longrightarrow A'_{r+1} + \dots + A'_p$ impliquerait, d'après le principe d'invariance :

$$\emptyset \longrightarrow a'_{r+1} + \dots + a'_p ,$$

ce qui serait absurde. Nous avons ainsi montré que :

S'il est possible que des particules q_i interagissent pour former des particules q'_j , la réaction obtenue en remplaçant chaque particule par sa conjuguée est également possible.

On connaît plusieurs exemples où la loi précédente est vérifiée. Ainsi les mésons π ou pions, donnent lieu aux décompositions

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu, \quad \pi^+ \longrightarrow e^+ + \nu$$

et aux réactions obtenues par passage aux conjugués :

Dans ces réactions μ représente un muon et ν un neutrino. De même, les mésons K des rayons cosmiques donnent lieu à deux réactions conjuguées de désintégration, qui sont connues :

$$K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu \text{ et } K^- \longrightarrow \mu^- + \nu$$

Nous citerons encore la réaction

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma \quad \text{où } \gamma \text{ est un photon.}$$

On voit en passant aux conjugués que $e^+ + e^- \longrightarrow \gamma$, mais on ne peut en conclure que $\gamma = \bar{\gamma}$ sans hypothèse supplémentaire. Il en serait ainsi par exemple si l'on pouvait affirmer qu'une interaction entre particules données n'est susceptible de se produire que d'une seule manière. Or on sait que les mésons K peuvent se désintégrer de plusieurs façons, et ce seul exemple suffit pour interdire d'énoncer une règle générale. En conclusion, on se bornera à dire que l'identité $\gamma = \bar{\gamma}$ est seulement plausible, en dehors de toute autre considération.

o

Ultérieurement nous utiliserons l'interprétation corpusculaire précédente des états à énergie négative en théorie de DIRAC, ce qui nous permettra d'étendre la signification de la théorie aux mélanges de négatons et de positons.

III. Description des particules localisées

L'ensemble des variables de position étant supposé déterminé, nous complétons le principe d'invariance par un principe d'indétermination relatif aux variables d'état et valable seulement pour les micro-objets.

Nous démontrerons tout d'abord un théorème :

La propriété pour une composante non nulle d'un tenseur ayant une signification physique de changer de signe ou de conserver celui-ci dans une rotation canonique impropre est invariante dans toute rotation propre de la base orthonormée.

Soit $T_{ij\dots n}$ une composante de tenseur d'indices $i, j, \dots n$ pris parmi les nombres 1, 2, 3, 4 dans une base B et soit $T'_{ij\dots n}$ cette composante dans la base conjuguée B' obtenue dans la rotation (4) par exemple. On sait que :

$$T'_{ij\dots n} = (-1)^k T_{ij\dots n}$$

k étant le nombre total des indices égaux à 1 ou à 4.

Effectuons une rotation propre ; B devient B_1 , sa conjuguée B' devient B'_1 , conjuguée de B_1 ; de même $T_{ij\dots n}$ devient $U_{ij\dots n}$ et $T'_{ij\dots n}$ devient $U'_{ij\dots n}$, ce qui démontre le théorème.

Nous en concluons, conformément à la conception objective du réel que suggère la relativité que cette propriété doit avoir une signification physique, mais il importe de souligner que ce changement éventuel de signe dépend en général non seulement de la grandeur physique mais aussi de la rotation canonique choisie car, si le signe de la composante de temps d'un vecteur est un invariant relativiste, il n'en est pas de même des signes de ses composantes d'espace et donc d'une composante quelconque de tenseur en général qui peut, par exemple, changer de signe dans une simple rotation d'espace.

Nous dirons qu'à chaque rotation canonique correspond une description d'une particule ou des champs électromagnétiques supposés localisés en un point d'univers, mais il y aura autant de descriptions que de rotations canoniques, toutes ces descriptions étant objectivement équivalentes conformément à l'idée générale de l'objectivité du réel.

Cette infinité même de descriptions limite la validité du concept corpusculaire et souligne son insuffisance puisque l'indétermination même ainsi introduite ne permet pas de suivre le corpuscule

dans son mouvement et rend par conséquent impossible l'étude de l'évolution du système physique.

a/ Les composantes non nulles d'un tenseur relativiste ayant une signification physique et décrivant l'état d'un micro-objet ou d'un champ localisés en un point d'univers et en mouvement relatif pour l'observateur sont indéterminées si elles changent de signe dans une rotation canonique impropre, déterminées si elles restent invariantes dans cette rotation.

b/ Le carré de la "longueur" d'univers d'un vecteur, étant invariant dans toute rotation propre ou impropre, est déterminé.

c/ Deux composantes d'un tenseur précédent commutent localement, c'est-à-dire en un point d'univers, et l'on écrira $(a,b) = 0$ si, et seulement si, il existe une rotation canonique qui les laisse toutes deux invariantes ; dans le cas contraire, a et b ne commutent pas et l'on écrira $(a,b) \neq 0$.

Vecteur impulsion - masse.

Soient p_x, p_y, p_z , iem les composantes. Dans la rotation (4), de $p'_x = -p_x$, $p'_y = p_y$, $p'_z = p_z$, $m' = -m$, on déduit que deux composantes rectangulaires de l'impulsion sont toujours déterminées et commutent toujours, la troisième étant indéterminée. Quant à l'énergie, elle ne commute jamais avec une composante de l'impulsion. D'où :

$$(p_x, p_y) = 0, \quad (p_x, p_z) = 0, \quad (p_y, p_z) = 0,$$

et $(m, p_x) \neq 0, \quad (m, p_y) \neq 0, \quad (m, p_z) \neq 0.$

Ainsi la composante de l'impulsion sur un plan d'espace, d'ailleurs arbitraire, est déterminée, la composante suivant la normale étant indéterminée.

Ces résultats sont indépendants de toute observation et donc de toute mesure. Ils signifient que, si l'on suppose le micro-objet localisé, cette localisation n'étant pas nécessairement connue, il s'ensuit des conditions nécessaires pour l'impulsion lorsque ce micro-objet

est supposé en mouvement relatif, hypothèse dont nous serons d'ailleurs amenés à discuter la validité.

Le cas $p_y = 0$, $p_z = 0$ et donc $y = b$, $z = c$ (b, c constants) est théoriquement compatible avec ces résultats ; la particule admettrait une trajectoire rectiligne mais non nécessairement connue et l'impulsion le long de la trajectoire serait tout à fait indéterminée ainsi que l'énergie. Il serait donc possible de parler de trajectoires rectilignes pour les particules dans les conditions qui viennent d'être précisées.

On pourrait objecter que les carrés p_x^2 , m^2 par exemple devraient être déterminés puisque invariants dans la rotation (4), mais ces carrés ne sont que des composantes du carré tensoriel $\vec{V} \otimes \vec{V}$ où $\vec{V}$ est l'impulsion-masse et il faut raisonner avec l'ensemble des composantes de ce carré pour obtenir, si possible, une description cohérente du réel physique dans une rotation impropre déterminée. Or cet ensemble s'écrit :

$$p_x^2, p_x p_y, \dots, i c p_x m, \dots, i c p_z m, -c^2 m^2 ;$$

si l'on considérait m^2 et par conséquent la valeur absolue de m comme déterminée, on serait en contradiction avec le fait que $m p_y$ doit être indéterminée puisque cette composante change de signe dans la rotation (4) alors que p_y est invariante dans cette rotation. Ainsi la considération du carré $\vec{V} \otimes \vec{V}$ ne peut conduire à une description cohérente du réel, ce qui signifie seulement que ce carré n'a pas de signification physique.

Mais si l'on considère ce carré tensoriel et plus généralement un tenseur T_{ij} d'ordre deux comme un tenseur densitaire dont les composantes n'ont de signification physique qu'après intégration dans un volume d'espace, on obtient bien les indéterminations attendues.

C'est ainsi qu'il existe en théorie de Dirac un semblable tenseur densitaire T_{ij} dont les composantes T_{14} , T_{24} , T_{34} , T_{44} représentent après une intégration d'espace les composantes finies de l'impulsion-énergie, et l'on obtient bien les variances précédentes, comme

on le voit aisément, par suite du changement de signe sur toutes les composantes introduit par l'intégration.

Masse propre.

Le carré de l'intervalle d'univers étant un invariant absolu, la relation $p^2 - c^2 m^2 = -m_0^2 c^2$ lie les deux composantes indéterminées de $\vec{V}$, et m_0^2 est un invariant de telle sorte que m_0 est déterminé en valeur absolue ; le micro-objet est ainsi absolument localisé dans son système propre, mais c'est une autre question qui sera examinée ultérieurement de savoir si cette localisation peut être connue ou mesurée.

V o l u m e .

L'élément de volume d'espace apparaît comme la composante de temps d'un trivecteur dual du vecteur dx, dy, dz, dt comme il a été dit, mais l'intervalle d'univers de ce vecteur dual est un invariant qui est précédemment le module de l'élément de volume d'espace qui doit ainsi être considéré non comme la composante de temps, indéterminée, d'un vecteur, mais comme la "longueur" d'un vecteur d'univers par suite de la condition $dt = 0$ qui le mesure à temps constant et qui n'est pas invariante dans un changement de repère galiléen. D'ailleurs, dans un mouvement, cet élément de volume $du = dx dy dz$ est contracté tandis que la composante de temps d'un vecteur est dilatée, mais dans une rotation (4) la transformation (9) $du' = -du$ est toujours valable puisque la condition $dt = 0$ est ici invariante^{*)}.

On remarque que cette détermination du volume est bien en accord avec l'hypothèse faite ici de la localisation du système physique.

S p i n .

De la transformation déjà indiquée du vecteur spin $\vec{S}$ on déduit

*) Le résultat relatif au volume qui est exposé ici est en contradiction avec celui que nous avons publié dans "Invariance et détermination du réel physique", p.17, Editions Belin, Paris 1967, qui doit ainsi être modifié en conséquence.

qu'une seule composante de spin peut être déterminée sur un axe d'ailleurs quelconque, les deux autres composantes étant indéterminées de telle sorte que deux composantes rectangulaires du spin ne peuvent commuter, soit :

$$(S_x, S_y) \neq 0, \quad (S_x, S_z) \neq 0, \quad (S_y, S_z) \neq 0.$$

Spin total.

La "longueur" du vecteur densité de spin étant un invariant d'univers est déterminée ainsi, en conséquence, que le spin total S_0 défini précédemment dans le système propre, au signe près.

Champs électromagnétiques.

Des formules de transformation des champs dans la rotation (4) déjà écrites :

$$\begin{aligned} H'_x &= H_x, & H'_y &= -H_y, & H'_z &= -H_z, & E'_x &= E_x, & E'_y &= -E_y, \\ & & & & & & & & E'_z &= -E_z \end{aligned}$$

on déduit que les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ suivant un axe, d'ailleurs arbitraire, est déterminée et que les composantes suivant deux axes rectangulaires au précédent sont indéterminées.

En outre, les composantes des champs suivant un axe commutent quel que soit cet axe, tandis que la composante d'un champ suivant un axe ne commute pas avec la composante de ce champ ou de l'autre champ suivant un axe perpendiculaire.

On sait qu'il existe pour le champ $\vec{E}, \vec{H}$ deux invariants et deux seulement, la différence $E^2 - H^2$ des carrés des longueurs et le produit scalaire $E.H$, d'où deux conditions pour les quatre composantes indéterminées du champ.

Enfin la théorie électromagnétique des champs introduit un tenseur symétrique d'univers M_{ij} de rang 2, ou tenseur de Maxwell, qui représente l'impulsion-énergie du champ électromagnétique et dont les composantes sont des fonctions homogènes et du second degré des composantes

des champs. Ce tenseur n'est défini qu'à un tenseur additif près dont la divergence d'univers est nulle ; il n'est donc pas complètement déterminé mais les variances de ses composantes sont bien définies et, en intégrant les composantes M_{14} , M_{24} , M_{34} , M_{44} de ce tenseur densitaire dans un volume d'espace, on obtient bien les indéterminations du vecteur impulsion-énergie qui est ici le vecteur de Poynting auquel on adjoint la densité d'énergie.

En définitive, nous pouvons écrire les relations suivantes de commutation et de non-commutation :

$$\begin{aligned}
 (E_x, H_x) &= 0, & (E_y, H_y) &= 0, & (E_z, H_z) &= 0 \\
 (E_x, E_y) &\neq 0, & (E_x, E_z) &\neq 0, & (E_y, E_z) &\neq 0 \\
 (H_x, H_y) &\neq 0, & (H_x, H_z) &\neq 0, & (H_y, H_z) &\neq 0 \\
 (E_x, H_y) &\neq 0, & (E_x, H_z) &\neq 0, & (E_y, H_x) &\neq 0 \\
 (E_y, H_z) &\neq 0, & (E_z, H_x) &\neq 0, & (E_z, H_y) &\neq 0
 \end{aligned}$$

o

Nous constatons, en conclusion, que les résultats précédents relatifs au vecteur impulsion-masse, au vecteur spin, au spin total et aux champs électromagnétiques sont en bon accord qualitatif avec ceux de la mécanique ondulatoire.

IV. Description générale des phénomènes élémentaires

La description précédente ne peut servir à l'étude de l'évolution des phénomènes élémentaires, mais elle a mis en évidence dans le système propre de la particule la masse propre, le volume propre, le spin et le spin propre. Il nous faut parvenir maintenant à une description globale du repos relatif et du mouvement relatif et renoncer en conséquence à la localisation du phénomène élémentaire pour étudier son mouvement relatif.

Nous supposons tout d'abord que l'état dynamique du système non localisé est un cas pur, c'est-à-dire qu'il est défini par un état E

donné par (14) à un instant donné ; on sait qu'il existe de tels cas précisés aux erreurs d'expérience près. Nous les supposerons donc théoriquement possibles et nous examinerons comment les principes d'invariance et d'indétermination peuvent leur être appliqués, le cas général résultant d'une superposition de cas purs.

Vecteur et domaine de localisation.

Associions donc en toute généralité à ce phénomène physique étendu dans l'état dynamique E à énergie positive observable l'ensemble des points d'un pavé (P) d'espace-temps défini par les inégalités :

$x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$, $z_1 \leq z \leq z_2$, $t_1 \leq t \leq t_2$,
si M(x,y,z,ict) est un point quelconque de (P), les x_1 , y_1 , $z_1 \dots t_2$ étant déterminés.

Soit I le point de coordonnées :

$$x_0 = (x_1 + x_2)/2 , y_0 = (y_1 + y_2)/2 , z_0 = (z_1 + z_2)/2 , t_0 = (t_1 + t_2)/2$$

Posons en outre :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \text{ avec } \vec{r} = \vec{r}(x,y,z) , \vec{r}_0 = \vec{r}_0(x_0, y_0, z_0) , \Delta t = t - t_0.$$

Nous appellerons le vecteur $\vec{Q}(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta ict)$ le vecteur de non-localisation. Il est associé à tout point M de (P) et il détermine la position de M lorsque celle de I est connue et qu'il est lui-même déterminé.

Principe d'indétermination.

Il s'applique évidemment au vecteur $\vec{Q}$. La rotation (4) montre que Δx et Δt sont indéterminés contrairement à Δy et Δz qui sont déterminés. Par contre dans la rotation qui change le signe de la seule composante de $\vec{Q}$ sur l'axe des y, Δy et Δt sont indéterminés contrairement à Δx et Δz . Ces trois descriptions ne peuvent pas être considérées comme objectivement équivalentes étant donnée la forme générale du pavé (P), de telle sorte que le principe d'indétermination pour $\vec{Q}$, c'est-à-dire pour les variables de position, doit être énoncé en utili-

sant la rotation (13) :

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad t' = -t$$

qui traite symétriquement les axes et dans laquelle Δx , Δy , Δz et Δt sont indéterminés comme il se doit.

Faisons encore deux remarques :

a/ On peut remplacer (P) par un domaine d'univers possédant la symétrie sphérique et engendré par des sphères d'espace se déplaçant entre les instants t_1 et t_2 . On appellera ce domaine boule d'univers.

b/ Le principe d'indétermination ne peut s'appliquer à l'état dynamique par définition même du cas pur, c'est-à-dire que son intervention introduira le cas général.

Principe d'invariance.

a/ Le principe d'invariance appliqué à l'état E implique l'existence du phénomène dans l'état conjugué $\bar{E}$ défini par (15) et inobservable.

b/ Le principe d'invariance doit être aussi appliqué à (P), ce qui au premier abord paraît en contradiction avec l'extension du pavé ou de la boule dans le temps puisque l'invariance n'a qu'une signification instantanée, mais il suffit de feuilleter le pavé ou la boule par des hyperplans $t = C^{\text{ste}}$ entre les instants t_1 et t_2 pour définir à l'instant t un pavé ou une boule d'espace $(J)_t$. La réunion, lorsque t parcourt le segment (t_1, t_2) , de ces domaines d'espace $(J)_t$ engendre (P) ou la boule d'univers précédemment définis, de telle sorte que le principe s'applique à tout domaine $(J)_t$, l'origine commune des repères étant choisie au centre $J(t)$ du domaine $(J)_t$ et l'instant t étant l'instant origine.

L'instantanéité du principe d'invariance est ainsi en bon accord avec le rôle particulier de la variable temporelle en mécanique ondulatoire.

Inégalités fondamentales.

Soit $\vec{V}(\vec{p}, icm)$ le vecteur impulsion-masse. On forme avec $\vec{V}$ et $\vec{Q}$ le produit tensoriel $\vec{V} \otimes \vec{Q}$ dont les seules composantes invariantes dans une rotation canonique quelconque (4) sont :

$$\Delta x p_x, \Delta y p_y, \Delta z p_z, \dots, c^2 m \Delta t.$$

Les ensembles de nombres positifs $|\Delta x p_x|$, $|\Delta y p_y|$, $|c^2 m \Delta t|$, obtenus en donnant aux composantes de $\vec{Q}$ toutes les valeurs possibles dans (P) sont tous minorés par 0 et admettent donc une borne inférieure positive ou nulle. Etant donné les rôles en un sens symétriques que jouent les axes d'espace et de temps dans l'univers de Minkowski, nous prendrons égales ces quatre bornes inférieures et nous écrirons :

$$|\Delta x p_x| \geq h, |\Delta y p_y| \geq h, |\Delta z p_z| \geq h, |c^2 m \Delta t| \geq h \quad (22)$$

en désignant par $h \geq 0$ cette valeur commune :

Démontrons la proposition :

La constante h est différente de zéro.

Si en effet h était nulle, $|\Delta t|$ pourrait être rendue aussi petite que l'on voudrait car m est toujours différent de zéro, même dans le cas d'un photon puisque le phénomène élémentaire est en mouvement. De plus $\vec{p} \neq \vec{0}$ pour la même raison exige que l'une au moins des composantes de p soit différente de zéro. Soit p_x cette composante ; si h était nulle, $|\Delta x|$ pourrait être rendue aussi petite que l'on voudrait, c'est-à-dire que x serait déterminée et que, en conséquence, le domaine élémentaire ne posséderait pas l'indétermination exigée par la rotation (13). Donc h est différente de 0 et sera identifiée avec la constante de Planck.

On pourrait penser en prenant $p_y = p_z = 0$ ce qui est toujours possible que les seconds membres des deux inégalités (22) correspondantes doivent être nuls, mais cette façon de voir non seulement serait en contradiction avec le rôle symétrique des axes d'espace, mais permettrait de prendre $|\Delta y|$ et $|\Delta z|$ aussi petits que l'on voudrait lorsque p_y et p_z seraient différents de 0. Il faut donc, dans le cas envisagé, interpréter les deux inégalités (22) relatives à Δy et Δz en consi-

dérant que Δy et Δz sont totalement indéterminés c'est-à-dire susceptibles de prendre toute valeur absolue aussi grande que l'on veut, ce qui revient à dire que $(J)_t$ est une bande d'espace comprise entre deux plans perpendiculaires à $\vec{Ox}$.

Pavé minimum.

Prenons $\vec{Ox}$ colinéaire à $\vec{p}$. Posons $h/p = L$ (longueur d'onde de Louis de Broglie), $h/mc^2 = h/W = T = 1/\nu$ et enfin $L = wT$ d'où l'on déduit $w = c^2/\nu$. On appelle T la période, ν la fréquence et w la vitesse de phase.

Des inégalités (22) on déduit a fortiori, en respectant la symétrie des axes d'espace :

$$|\Delta x| \geq L, \quad |\Delta y| \geq L, \quad |\Delta z| \geq L, \quad |\Delta t| \geq T \quad (23)$$

quelle que soit l'orientation de $p = |\vec{p}|$.

La longueur d'onde et la période définissent ainsi un pavé minimum (ou une boule minimum) engendré par le déplacement le long de l'axe des temps pendant une durée T d'un cube d'espace d'arête L . A l'intérieur de ce domaine minimum, le principe d'indétermination est certainement valable, ce qui revient à dire que la localisation d'un micro-objet à l'intérieur de ce pavé est dépourvue de sens précis ou encore que ce domaine est un domaine d'égale probabilité de présence du micro-objet.

Cas général.

Dans le cas général, le principe d'indétermination intervient également pour les variables d'état dans le pavé (2), c'est-à-dire que l'état du système physique est représenté par une superposition de cas purs interprétés physiquement, conformément au principe de décomposition spectrale.

Il importe ici de considérer les bornes inférieures des L et T associés à chaque cas pur. Dans le cas du photon, il existe certainement des bornes inférieures non nulles pour L et T et nous les écrirons

inf.L et inf.T. Dans le cas d'un autre phénomène physique élémentaire, il existe une borne supérieure du carré v^2 de la vitesse, qui est inférieure à c^2 et, en conséquence, des limites inférieures non nulles pour L et T. On peut donc remplacer en toute généralité les inégalités (23) par :

$$|\Delta x|, |\Delta y|, |\Delta z| \geq \text{inf.L}, \quad |\Delta t| \geq \text{inf.T} \quad (24)$$

et il existe bien ainsi un pavé (ou une boule) minimum ayant les propriétés déjà indiquées.

Onde et micro-objet.

Nous parvenons ainsi à une conception globale du phénomène élémentaire faisant intervenir à la fois l'aspect ondulatoire et l'aspect corpusculaire et d'une façon complémentaire puisqu'un phénomène en mouvement relatif doit être considéré comme non-localisé tandis que le même phénomène au repos relatif peut être considéré comme localisé théoriquement. Si donc on provoque, d'une façon quelconque, le passage au repos relatif pour l'observateur, du phénomène en mouvement, on peut utiliser l'image du micro-objet lorsque brusquement il apparaît une localisation absolue. Cette localisation doit se produire dans (P) et sera affectée d'une probabilité associée à tout point M de (P).

Ces deux concepts, extension dans l'univers pour le mouvement relatif et localisation théorique pour le repos relatif, expliquent le dualisme ondes-corpuscules qui est à la base de la mécanique ondulatoire. Dans le cas du photon, ils ont une signification objective, tout phénomène lumineux en mouvement ayant la même vitesse c tandis que le photon au repos est dans un état particulier appelé souvent état d'annihilation. Par contre, tout phénomène physique réel est en mouvement avec une vitesse maximum dont la valeur absolue est inférieure à c , de telle sorte que l'on peut, lorsque le phénomène a une vitesse déterminée, imaginer deux observateurs, l'un au repos relatif et l'autre en mouvement relatif, si bien que les deux aspects ondulatoire et corpusculaire sont en un sens aussi peu objectifs l'un que l'autre, mais une situation analogue existe en relativité pour l'espace et le temps

qui sont, tous deux aussi, relatifs à l'observateur. Cependant ces espaces et ces temps relatifs ne sont que les reflets dans la mesure d'un espace-temps objectif que nous ne pouvons toutefois, malgré son objectivité, nous représenter valablement que d'un point de vue figuratif de mathématicien. D'une façon tout à fait analogue en mécanique des particules onde et micro-objet sont les reflets relatifs au mouvement de l'observateur d'une même réalité objective qui existe indépendamment de l'observation.

Dans cette conception globale, la théorie générale des trous précédemment développée est valable et elle présente le double aspect instantané et corpusculaire puisqu'elle apparaît comme une lacune localisée à énergie négative. Ce résultat nous sera très utile pour interpréter l'équation de Dirac.

Réversibilité des réactions nucléaires.

Soit une réaction nucléaire, collision ou désintégration, qui fait passer un ensemble de particules $q_1, q_2 \dots q_n$ dans l'état E_1 à l'instant t_1 à un ensemble de particules $q'_1, q'_2 \dots q'_p$ dans l'état E_2 à l'instant t_2 .

Nous considérons comme précédemment qu'il existe pendant la très courte durée de la réaction un système propre commun aux particules q_i ($i = 1, 2 \dots n$) et q'_j ($j = 1, 2 \dots p$). Soient W_i et W'_j les énergies au repos des particules q_i et q'_j et W l'énergie totale mise en jeu. Soit $(J)_{i,t}$ l'ensemble des pavés d'espace correspondant à q_i lorsque t parcourt le segment t_1, t_2 et de même l'ensemble $(J)'_{j,t}$.

Supposons maintenant que la durée de la réaction soit inférieure à $2h/W$; il en résulte que $|\Delta t|$ est inférieur à h/W et les conditions $W_i, W_j \ll W$ montrent que $T_i, T'_j \gg |\Delta t|$ de telle sorte que les ensembles $(J)_{i,t}$ et $(J)'_{j,t}$ ont une intersection d'espace non vide puisqu'ils interagissent et, en commun, le segment (t_1, t_2) . Le principe d'indétermination est donc valable à l'intérieur de leur intersection d'espace-temps, c'est-à-dire que, si l'état E_2 existe à l'instant t_2 il peut exister l'instant t_1 avec la même probabilité ; de

même E_1 peut exister à l'instant t_2 puisqu'il existe à l'instant t_1 . Ainsi la possibilité de la réaction $\sum q_i \rightarrow \sum q'_j$ implique la possibilité de la réaction $\sum q'_j \rightarrow \sum q_i$ sous réserve de la condition $t_2 - t_1 \ll 2h/W$, d'où l'énoncé :

Les réactions nucléaires sont réversibles si leur durée est inférieure à $2h/W$, W étant l'énergie totale mise en jeu.

a/ Soit une interaction forte faisant intervenir des baryons ou des mésons dont la masse propre km_0 (m_0 , masse propre de l'électron) varie par conséquent selon les particules de $300 m_0$ environ pour les pions à $3000 m_0$ environ pour les hypérons. Comme $W = \sum km_0$ la somme étant étendue à toutes les particules q_i par exemple, on voit qu'une telle réaction n'est réversible que si sa durée est comprise entre

$$2h/N \ 3000m_0 \times 9 \cdot 10^{-20} \text{ s.} \quad \text{et} \quad 2h/3000m_0 \times 9 \cdot 10^{-20} \text{ s.} ,$$

N étant le nombre d'hypérons, soit à peu près entre $5/N \ 10^{-24}$ et $5 \cdot 10^{-23}$ seconde, ce qui correspond bien à l'estimation habituelle de 10^{-23} s.

b/ Soit une interaction qui fait intervenir des photons, telle que la dématérialisation des électrons :

$$e^+ + e^- = \gamma .$$

Comme $W = 2m_0 c^2$ la durée de la réaction doit en conséquence être de l'ordre de
$$h/m_0 c^2 \quad 6,55/8,1 \ 10^{-20} \text{ seconde} ,$$

ce qui correspond bien à l'estimation habituelle.

c/ En ce qui concerne les interactions faibles où interviennent les électrons et les neutrinos, leur durée estimée à 10^{-8} et 10^{-9} seconde environ est trop longue pour que le résultat précédent leur soit applicable. On peut également douter de leur réversibilité.

Relations d'incertitude.

Toute observation se traduisant effectivement par des interactions à très courte distance fait intervenir l'aspect corpusculaire. Or deux micro-objets qui se heurtent sont en repos relatif au moins

pendant un temps très court.

a/ Soient A et B deux phénomènes en extension, d'impulsions $\vec{p}$ et $\vec{q}$ (cas purs), et un observateur O constamment au repos pour A qu'il peut donc considérer comme localisé. Si le mouvement de B est brusquement modifié par la présence de A, on peut considérer que B a été pendant un temps très court au repos par rapport à A et que, pour l'observateur O, B s'est trouvé localisé à cet instant au même point que A qu'il a heurté, de telle sorte que la théorie corpusculaire des chocs de la mécanique générale peut s'appliquer.

Or A, au repos pour O, prend après le choc une impulsion Δq_x , Δq_y , Δq_z si $\Delta \vec{q}$ est la variation d'impulsion subie par B et communiquée à A. Il s'ensuit que A en mouvement pour O après le choc a un vecteur de non-localisation $\vec{Q}$ satisfaisant aux inégalités fondamentales qui s'écrivent ici :

$$|\Delta x \Delta q_x| \geq h, |\Delta y \Delta q_y| \geq h, |\Delta z \Delta q_z| \geq h \quad (25)$$

$$\text{et} \quad |mc^2 \Delta t| \geq h \quad \text{si} \quad mc^2 = \Delta W + m_0 c^2 \quad (26)$$

ΔW étant la variation d'énergie subie par B et reçue par A. Les inégalités (25) sont les incertitudes de Heisenberg et elles représentent les indéterminations qui affectent la position de A après le choc et qui rendent impossible toute détermination exacte de la position de A par l'observateur O.

b/ Dans le cas où A est un phénomène lumineux, le raisonnement précédent s'applique encore si l'on considère, comme Louis de Broglie^{*)} que la lumière se propage avec une vitesse inférieure à c mais indiscernable de c, la masse propre du photon étant très petite mais non nulle. Si cette vitesse est rigoureusement c, c'est-à-dire si la masse propre du photon est rigoureusement nulle, on retrouve les inégalités (25) et (26) lorsque l'on reçoit le photon sur une plaque photographique, ce qui provoque son repos relatif par rapport à l'observateur.

*) Louis de Broglie, Une nouvelle théorie de la lumière. Tome I, chap.2, Paris 1940.

De $\vec{\Delta p} = \vec{p}$ on déduit les inégalités précédentes en prenant $m_0 = 0$;
ici les incertitudes des Δx , Δz , Δt , Δp_x , Δp_y , Δp_z , ΔW
sont relatives à la situation du photon avant son arrivée sur la plaque.

Ce résultat est évidemment valable pour tout phénomène qui
passe brusquement du mouvement au repos, par exemple pour un électron
arrivant sur un écran.

c/ Si le phénomène en mouvement relatif n'a pas de vitesse bien définie, l'observateur O pourra provoquer son repos, donc l'apparition du corpuscule et observer son impact sur un écran. Il y aura ainsi une variation $\vec{\Delta p}$ de l'impulsion dont les composantes sont comprises en valeur absolue entre deux valeurs extrêmes possibles avant l'impact sur l'écran. Or avant cette arrivée, les inégalités fondamentales exigent d'une façon nécessaire et suffisante :

$$|\Delta x \cdot \inf.p_x| \gg h \quad , \quad |\Delta y \cdot \inf.p_y| \gg h \quad , \quad |\Delta z \cdot \inf.p_z| \gg h \\ |\Delta t \cdot \inf.mc^2| \gg h \quad .$$

De $|\Delta p_x| \gg |\inf.p_x|$ et des inégalités analogues on déduit :

$$|\Delta x \cdot \Delta p_x| \gg |\Delta x \cdot \inf.p_x| \gg h$$

et des inégalités analogues, c'est-à-dire (25) et (26).

Comme dans le cas du photon reçu sur un écran, Δx , Δy , Δz représentent l'incertitude sur les localisations possibles dans un domaine d'espace associé à un instant précédant immédiatement le choc.

Ainsi les incertitudes d'Heisenberg sont toujours valables et elles ne dépendent pas du dispositif particulier d'observation utilisé.

DEUXIEME PARTIE

INTERPRETATION DE L'EQUATION DE P. DIRAC

La description du pavé (P) est complétée en théorie de Dirac par l'introduction d'une fonction d'onde représentée par une matrice uni-colonne $\mathcal{U}$ à quatre lignes et qui se transforme dans une rotation de Lorentz comme un spineur.

I. Equation de Dirac.

Posons : $P_j = 1/k \partial_j + e/c A_j$ avec $j = 1, 2, 3, 4$,
 $\partial_j = \partial/\partial x^j$, $k = 2i\pi/\hbar$ et $A_4 = iV$, le vecteur $\vec{A}$, iV étant le potentiel.

L'équation de P. Dirac s'écrit alors pour l'observateur 0 :

$$(iP_4 - \sum_m P_m a_m - m_0 c a_4) \mathcal{U} = 0 \quad (27) \quad \text{avec } m = 1, 2, 3.$$

On associe en outre à cette équation (27) l'équation (28) obtenue à partir de (27) en changeant k en $-k$ et en remplaçant $\mathcal{U}$ par une matrice uniligne $\bar{\Phi}$ à quatre colonnes qui opère vers la droite.

La théorie de Dirac introduit ensuite des expressions $\bar{\Phi} A \mathcal{U}$ où A est un produit hermitien de matrices a_m, a_4 qui représentent les densités des grandeurs physiques. Ces densités, dont les intégrales d'espace ont une signification physique précise, se transforment dans une rotation de Lorentz comme des tenseurs. Si l'on effectue le changement d'opérateurs correspondant à la transformation de coordonnées envisagée, les équations (27) et (28) sont invariantes lorsque l'on pose $\mathcal{U}' = Q \mathcal{U}$ et $\bar{\Phi}' = \bar{\Phi} Q^{-1}$, Q étant une matrice carrée convenable. Comme Q n'est pas en général unitaire car $Q^+ = a_4 Q^{-1} a_4$, la condition $\bar{\Phi} = \mathcal{U}^+$ qui permet de faire correspondre à une solution $\mathcal{U}$ de (27) une solution $\bar{\Phi}$ de (28) étant donné l'hermiticité des a_m, a_4 comme on le vérifie aisément, ne se conserve pas dans un changement de base.

Cette réserve faite, on écrira les densités des grandeurs de

champ dans une base donnée sous la forme (29) suivante :

$$a/ \quad j_x = -\psi^\dagger a_1 \psi, \quad j_y = -\psi^\dagger a_2 \psi, \quad j_z = -\psi^\dagger a_3 \psi, \quad j_4 = i\rho = i\psi^\dagger \psi,$$

pour le vecteur densité-flux, dont l'intégration dans l'espace de la composante de temps permet de normer la fonction d'onde.

$$b/ \quad h_x = \psi^\dagger i a_2 a_3 a_4 \psi, \quad h_y = \psi^\dagger i a_3 a_1 a_4 \psi, \quad h_z = \psi^\dagger i a_1 a_2 a_4 \psi,$$

$$c/ \quad e_x = \psi^\dagger i a_1 a_4 \psi, \quad e_y = \psi^\dagger i a_2 a_4 \psi, \quad e_z = \psi^\dagger i a_3 a_4 \psi,$$

$$d/ \quad s_x = \psi^\dagger i a_2 a_3 \psi, \quad s_y = \psi^\dagger i a_3 a_1 \psi, \quad s_z = \psi^\dagger i a_1 a_2 \psi, \\ s_4 = \psi^\dagger i a_1 a_2 a_3 \psi.$$

$$e/ \quad \Omega = \psi^\dagger a_4 \psi, \quad \bar{\Omega} = \psi^\dagger a_1 a_2 a_3 a_4 \psi.$$

Ces tenseurs sont des tenseurs abstraits, c'est-à-dire qu'ils ont été écrits sans les coefficients numériques qui précisent leur signification physique.

C'est ainsi qu'il faut multiplier $\vec{j}$ par c pour obtenir le vecteur densité-flux, $\vec{e}$ et $\vec{h}$ par le magnéton de Bohr $B = e\hbar/4\pi m_0 c$ pour obtenir la densité de moment électrique et de la densité de moment magnétique, $\vec{s}$ par $\hbar/4\pi$ pour obtenir la densité de spin. La signification des invariants Ω et $\bar{\Omega}$ sera précisée ultérieurement.

II. Invariance relativiste de l'équation de Dirac.

L'équation de Dirac doit satisfaire au principe d'invariance et en conséquence posséder l'invariance relativiste complète. Récrivons l'équation (27) sous forme développée :

$$\left[1/c \frac{\partial}{\partial t} - ke^-/c V - \sum a_1 (\frac{\partial}{\partial x} + ke^-/c A_1) - km_0 c a_4 \right] \psi = 0,$$

où ψ est une fonction convenable des $x, y, \dots, A_1, \dots, m_0$.

La fonction $\psi' = \psi(x', y', \dots, A'_1, \dots, m'_0)$ où les $x', y', \dots, A'_1, \dots, m'_0$ sont les transformées des $x, y, \dots, A_1, \dots, m_0$ dans la rotation (13) vérifiera évidemment l'équation :

$$(30) \quad \left[1/c \frac{\partial}{\partial t'} - ke^-/c V' - \sum a_1 (\frac{\partial}{\partial x'} + ke^-/c A'_1) - km'_0 c a_4 \right] \psi' = 0,$$

qui n'est autre que (27) écrite sous forme invariante pour l'observateur

$\bar{O}$ avec une masse propre transformée de celle de O , soit $m'_0 = -m_0$.

Lorsque le champ extérieur est nul ($\vec{A} = \vec{0}, V = 0$), on peut poser $\mathcal{U} = A \exp.K$ avec A unicolonne et

$$K = k(Wt - \vec{p} \cdot \vec{r}) ,$$

W et $\vec{p}$ étant l'énergie et l'impulsion associées à un état E du négaton, donné par (14).

Cette fonction $\mathcal{U}$ sera solution de (27), si et seulement si :

$$(W/c + \sum a_1 p_x - m_0 c a_4) A = 0 \quad (31).$$

Or les éléments de A sont des fonctions de W, p_x, p_y, p_z, m qui prennent la même valeur pour des valeurs opposées de ces variables, et donc $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$ puisque le facteur exponentiel reste invariant dans le retournement des axes, étant donné que $W' = -W, \vec{p}' = \vec{p}$.

La fonction $\mathcal{U}'$ est associée pour l'observateur $\bar{O}$ à l'état $\bar{E}$ donné par (15) et si l'on utilise les définitions (29) en remplaçant B par B' avec $B' := -B$ puisque $e' = e$ et $m'_0 = -m_0$, on obtient le résultat relativiste attendu pour les densités, compte tenu du fait que le changement de base exige que tous les seconds membres de (29) doivent être multipliés par $-1^{(*)}$, c'est-à-dire :

$\vec{j}' = \vec{j}, \vec{s}' = \vec{s}$ (32), ainsi que l'invariance du tenseur F_{ij} du champ électromagnétique, invariance qui induit les transformations

$$\vec{e}' = -\vec{e}, \vec{h}' = -\vec{h}$$

lorsque l'on considère $\vec{e}$ et $\vec{h}$ comme des vecteurs d'espace.

On obtient enfin les transformations $\Omega' = -\Omega$ et $\vec{\Omega}' = -\vec{\Omega}$ (33).

Toutes ces densités doivent être intégrées dans des volumes d'espace négatifs pour fournir les grandeurs ayant une signification physique précise, de telle sorte que l'équation de normalisation

$$1 = \int_v \mathcal{U}^* \mathcal{U} \, du \quad (34)$$

est invariante, v étant le volume d'intégration.

*) O. Costa de Beauregard, Thèse, p. 25-28, Paris 1943.

Nous verrons que Ω est la densité propre de charge pour un mélange de négatons et de positons, de telle sorte que la charge finie e est donnée par

$$e = e^- \int_V \psi^+ a_4 \psi \, du \quad (35)$$

Si nous supposons ici que l'équation est seulement relative au négaton, nous obtenons dans le système propre du négaton $\psi^+ \psi = \psi^+ a_4 \psi$ de telle sorte que $e = e^-$, d'où l'invariance de la charge dans le système propre.

Les masses propres m_0 et m'_0 sont obtenues en multipliant les deux membres de (34) respectivement par m_0 et m'_0 , d'où :

$$m_0 = m_0 \int_V \psi^+ \psi \, du \quad \text{et} \quad m'_0 = m'_0 \int_V \psi^+ \psi \, du \quad (36).$$

Dans le passage de l'équation (27) à l'équation (30) m_0 est remplacé par $m'_0 = -m_0$, alors que dans la brochure "Invariance et détermination du réel physique" la valeur de m_0 avait été conservée pour la masse propre. Par contre c et h sont toujours des constantes car c est un rapport d'unités et l'invariance de h résulte par exemple des transformations de W et de ν dans l'équation $W = h\nu$ qui relie l'énergie et la fréquence.

La façon de transformer ici (27) est plus en accord avec les exigences de la relativité et elle conduit clairement aux résultats attendus, mais elle ne permet pas de conclure immédiatement à l'invariance relativiste des solutions de (27), qui ne sera en effet établie que si l'on montre qu'il existe pour (30) des solutions à énergie positive correspondant à l'état E_0 ou, pour (27), des solutions à énergie négative correspondant à l'état $E'_0 = \bar{E}_0$ puisque l'on sait que cette invariance n'a de signification physique que dans le système propre.

III. Etats à énergie négative.

La mise en évidence des solutions à énergie négative pour l'observateur O qui utilise (27) permettra en outre d'introduire l'antiparticule et de généraliser l'interprétation habituelle de l'équation (27).

Or, si $\vec{A} = \vec{0}, V = 0$, il existe deux types de solutions négatives pour 0, dont l'un correspond à l'état E' , donné par (16). Soit ψ' l'onde de ces solutions $E'(-W, -\vec{p})$, l'onde $A \exp.k$ des solutions $E(W, \vec{p})$ vérifiant (31). On pose

$$\psi' = A' \exp.k(-Wt + \vec{p} \cdot \vec{r}) ,$$

d'où les conditions (37) : $(W/c + \sum a_1 p_x + m_0 c a_4) (-A') = 0$

qui sont satisfaites pour $A' = a_1 a_2 a_3 A = aA$ (38) .

Or a commute avec a_1, a_2, a_3 et anticommute avec a_4 d'où, en utilisant les définitions (29), les transformations attendues, d'après (15bis) :

$$\vec{j}' = \vec{j} , \vec{e}' = -\vec{e} , \vec{h}' = -\vec{h} , \vec{s}' = \vec{s} , \Omega' = -\Omega , \bar{\Omega}' = -\bar{\Omega} .$$

Pour obtenir la charge de E'_0 utilisons (35), d'où :

$$(39) \quad e = e^- \int_V \psi^+ a_4 \psi \, du = \bar{e} , \text{ puisque } v \text{ est négatif.}$$

Pour obtenir la masse propre m' , utilisons (36) en posant

$$(40) \quad m' = m_0 \int_V \psi^+ \psi \, du , \text{ soit } m' = -m_0 ,$$

et ces deux derniers résultats sont satisfaisants.

Remarquons enfin que, pour E'_0 , l'équation (34) de normalisation devient :

$$-1 = \int_V \psi'^+ \psi' \, du \quad (34 \text{ bis}),$$

-1 correspondant ainsi au caractère inobservable de la solution.

Mais pour $\bar{0}$ la convention précédente est inversée et +1 correspond à l'état inobservable tandis que -1 correspond à l'état observable.

Cette situation dissymétrique est, selon nous, satisfaisante, car elle traduit le fait que 0 est réel tandis que $\bar{0}$ est fictif. Si 0 et $\bar{0}$ écrivaient mathématiquement de la même façon tous leurs résultats, rien ne distinguerait 0 et $\bar{0}$ qui devraient, objectivement, être identiques, ce qui serait absurde. D'ailleurs on peut toujours, en définitive, supprimer $\bar{0}$ pour supprimer cette dissymétrie.

On peut aussi, pour éviter (34 bis), intégrer dans les volumes positifs c'est-à-dire passer à l'antiparticule, de telle sorte que le couple (e^-, e^+) pour 0 devient (e^+, e^-) pour $\bar{0}$, les charges opposées se

correspondant avec invariance de la fonction d'onde, ce que l'on traduit souvent en disant que le retournement des axes équivaut à une conjugaison de charge (théorème CPT ou de LUDERS), mais nous préférons éviter cette formulation trop elliptique étant donné la signification objective que nous attribuons au retournement des axes.

IV. Interprétation générale de l'équation de Dirac.

Superposons à $t = 0$ et dans le système propre les deux solutions précédentes. On forme ainsi, en introduisant un angle β compris entre 0 et π et appelé "angle de D. Hestenes" pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, la solution

$$\psi = (\cos \beta/2 + a \sin \beta/2) A \quad (41)$$

$\beta = 0$ correspondant au négaton et $\beta = \pi$ au positon car l'intégration ayant lieu dans des volumes positifs l'onde aA qui correspond à $\beta = \pi$ introduit, comme on l'a vu, l'antiparticule.

La densité de présence propre est $\rho = \psi^\dagger \psi = A^\dagger (\cos^2 \beta/2 + \sin^2 \beta/2) A = A^\dagger A$ car $a^\dagger = -a$, $a^2 = -1$ et la condition de normalisation (34) traduit la présence d'un corpuscule, soit négaton, soit positon, la densité de probabilité de présence d'un négaton étant $\cos^2 \beta/2$ et celle d'un positon $\sin^2 \beta/2$, la masse étant m_0 .

La densité propre q de charge est donnée par (39), soit

$$q = e^- \psi^\dagger a_4 \psi, \text{ d'où}$$

$$q = e^- A^\dagger (\cos \beta/2 - a \sin \beta/2) a_4 (\cos \beta/2 + a \sin \beta/2) A$$

$$q = e^- A^\dagger a_4 (\cos \beta/2 + a \sin \beta/2)^2 A = e^- A^\dagger a_4 (\cos \beta + a \sin \beta) A$$

$$q = e^- A^\dagger a_4 A \cos \beta + e^- A^\dagger a_4 a A \sin \beta = \rho e^- \cos \beta = e^- \Omega,$$

Ω étant l'invariant $\psi^\dagger a_4 \psi$ de la théorie de Dirac, car $A^\dagger a_4 A = \rho$ et $\psi^\dagger a_1 a_2 a_3 a_4 \psi = 0$ dans le système propre.

On peut retrouver ce résultat en remarquant simplement que la densité de charge est $e^- \rho \cos^2 \beta/2$ pour le négaton et $e^+ \rho \sin^2 \beta/2$ pour le positon d'où, en additionnant, $e^- \rho \cos \beta$ pour l'onde ψ .

Si le corpuscule n'est pas chargé, "la densité propre de particule" est toujours $\rho \cos \beta$, $\beta = 0$ correspondant à la particule et $\beta = \pi$ à l'antiparticule.

La densité de moment magnétique $\vec{h}$ est donnée par (29), soit :

$$h_x = 2^+ i a_2 a_3 a_4 \mathcal{A} = A^+ i a_2 a_3 a_4 A \cos \beta ,$$

$$h_y = 2^+ i a_3 a_1 a_4 \mathcal{A} = A^+ i a_3 a_1 a_4 A \cos \beta ,$$

$$h_z = 2^+ i a_1 a_2 a_4 \mathcal{A} = A^+ i a_1 a_2 a_4 A \cos \beta ,$$

en tenant compte du fait que dans le système propre et pour l'onde plane

$$A^+ i a_1 a_4 A = A^+ i a_2 a_4 A = A^+ i a_3 a_4 A = 0 .$$

La densité du moment électrique $\vec{e}$ est donnée par (29) :

$$e_x = 2^+ i a_1 a_4 \mathcal{A} = A^+ (\cos \beta/2 - a \sin \beta/2) i a_1 a_4 (\cos \beta/2 + a \sin \beta/2) A \text{ ou}$$

$$e_x = A^+ (\cos \beta/2 - a \sin \beta/2)^2 i a_1 a_4 A = A^+ i a_1 a_4 \cos \beta - A^+ i a_2 a_3 a_4 A \sin \beta =$$

$$= - A^+ i a_2 a_3 a_4 A \sin \beta , \text{ puisque } A^+ i a_1 a_4 A = 0 \text{ dans le système propre.}$$

De la même façon :

$$e_y = 2^+ i a_2 a_4 \mathcal{A} = A^+ (\cos \beta/2 - a \sin \beta/2) i a_2 a_4 (\cos \beta/2 + a \sin \beta/2) A =$$

$$= - A^+ i a_3 a_1 a_4 A \sin \beta , \text{ puisque } A^+ i a_2 a_4 A = 0 \text{ dans le système propre,}$$

$$e_z = 2^+ i a_3 a_4 \mathcal{A} = A^+ (\cos \beta/2 - a \sin \beta/2) i a_3 a_4 (\cos \beta/2 + a \sin \beta/2) A =$$

$$= - A^+ i a_1 a_2 a_4 A \sin \beta , \text{ puisque } A^+ i a_3 a_4 A = 0 \text{ dans le système propre.}$$

La densité de spin est donnée par (29) :

$$s_x = 2^+ i a_2 a_3 \mathcal{A} = A^+ i a_2 a_3 (\cos^2 \beta/2 - a^2 \sin^2 \beta/2) A = A^+ i a_2 a_3 A , \text{ et de même}$$

$$s_y = 2^+ i a_3 a_1 \mathcal{A} = A^+ i a_3 a_1 A , \quad s_z = 2^+ i a_1 a_2 \mathcal{A} = A^+ i a_1 a_2 A .$$

Or dans le système propre si l'on tient compte des relations $A_1 = A_2 = 0$, A_1, A_2, A_3, A_4 étant les éléments de la matrice unicolonne A , on voit que

$$A^+ i a_2 a_3 a_4 A = - A^+ i a_2 a_3 A , \quad A^+ i a_3 a_1 a_4 A = - A^+ i a_3 a_1 A , \quad A^+ i a_1 a_2 a_4 A =$$

$$- A^+ i a_1 a_2 A .$$

L'invariant $\Omega = 2^+ a_4 \mathcal{A}$ est égal comme on l'a vu à $\rho \cos \beta$ et l'invariant $\bar{\Omega} = 2^+ a_1 a_2 a_3 a_4 \mathcal{A}$ est égal à $A^+ a_1 a_2 a_3 a_4 (\cos \beta/2 - a \sin \beta/2)^2 A$

$= A^+ a_1 a_2 a_3 a_4 A \cos \beta - A^+ a_4 A \sin \beta = -\rho \sin \beta$ car $A^+ a_4 A = \rho$ dans le système propre.

Enfin, toujours dans le système propre en théorie de Dirac,

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \rho^2.$$

On déduit des résultats précédents les relations :

$h_x = -s_x \cos \beta$, $h_y = -s_y \cos \beta$, $h_z = -s_z \cos \beta$, $\Omega = \rho \cos \beta$,
 $e_x = +s_x \sin \beta$, $e_y = +s_y \sin \beta$, $e_z = +s_z \sin \beta$, $\bar{\Omega} = -\rho \sin \beta$,
 que l'on peut écrire en désignant par $\vec{\sigma}_3$ le vecteur unitaire de spin :

$$\vec{h} = -\Omega \vec{\sigma}_3 , \quad \vec{e} = -\bar{\Omega} \vec{\sigma}_3 \quad (44)$$

En outre, dans le système propre, les relations suivantes sont évidentes :

$$\rho^2 = \vec{s}^2 = -\vec{j}^2 = \Omega^2 + \bar{\Omega}^2 \quad (43)$$

ainsi que l'orthogonalité du vecteur d'espace (s_x , s_y , s_z) et du vecteur de temps ($0,0,0,j_4 = i\rho$). On a donc vérifié les relations de PAULI-KOFINK.

Comme on pose, en théorie de Dirac, $\sin \hat{A} = -\bar{\Omega}/\rho$, $\cos \hat{A} = \Omega/\rho$, étant l'angle de T. Takabayasi^{*)} on voit que dans le système propre :

$$\beta = \hat{A}$$

et comme β décrit le mélange particule-antiparticule, on en conclut :
 a/ le mélange particule-antiparticule décrit physiquement l'angle $\hat{A}$;
 b/ une solution générale de l'équation de Dirac est relative à un mélange de particules et d'antiparticules et non à un cas pur de particules ou d'antiparticules.

Nous devons également considérer le cas des solutions $E_1' (-W, \vec{p})$ de l'équation (27). Posons :

$$\psi_1 = B \exp. (-Wt - \vec{p} \cdot \vec{r}) , \quad \text{d'où}$$

$$(W/c - \sum a_i p_{x_i} + m_0 c a_4) (-B) = 0 \text{ avec } B = -a' A \text{ et } a' = a_1 a_2 a_3 a_4 .$$

Il en résulte pour les grandeurs de champ de l'état E_1' les relations :

*) T. Takabayasi, Supplément à Prog. Théor. Phys., 4, 1957, p.10.

$$\vec{e}_1 = \vec{e} \quad , \quad \vec{h}_1 = -\vec{h} \quad , \quad \vec{s}_1 = \vec{s} \quad , \quad \Omega_1 = -\Omega \quad \text{et} \quad \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega} \quad .$$

En outre, la charge e' est donnée par $e' = e^- \int_V B^+ a_4 B du = e^-$ puisque v est négatif, et la masse propre m' par

$$m' = m_0 \int_V B^+ B du = -m_0, \text{ ce qui est satisfaisant.}$$

De plus, dans le système propre, $\vec{e}_1 = \vec{e} = \vec{0}$ et $\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega} = 0$, de telle sorte que $(E_1)_0$, état au repos de E_1 , coïncide avec $E'_0 = \bar{E}_0$ c'est-à-dire avec l'état conjugué, si bien que la superposition de E_0 et de $(E_1)_0$ avec passage à l'antiparticule pour ce dernier, c'est-à-dire avec intégration dans un volume positif, doit fournir le même résultat physique que l'onde (41), et (42) doit donc être vérifié si l'on pose :

$$\mathcal{U} = (\cos \beta/2 - a' \sin \beta/2) A \quad (45).$$

Ce résultat se vérifie aisément, comme le montrent les calculs publiés dans les Comptes rendus de l'Acad.Sc. 267, série B, 1968, p.1551.

La densité de présence propre est $\rho = A^+ (\cos \beta/2 - a' \sin \beta/2)^2 A = \mathcal{U}^+ \mathcal{U}$ puisque $a'^+ = a'$, $a'^2 = 1$, d'où $\rho = A^+ A - \sin \beta A^+ a' A$.

Or pour l'onde plane A en théorie de Dirac, $A^+ a' A = 0$, donc $\rho = \mathcal{U}^+ \mathcal{U} = A^+ A$ et la condition de normalisation traduit la présence dans tout l'espace d'un corpuscule, soit négaton avec une probabilité $\cos^2 \beta/2$, soit positon avec une probabilité $\sin^2 \beta/2$.

La densité propre de charge est donnée par

$$q = e^- \mathcal{U}^+ a_4 \mathcal{U} \quad , \quad \text{d'où}$$

$$q = e^- A^+ (\cos \beta/2 - a'^+ \sin \beta/2) a_4 (\cos \beta/2 - a' \sin \beta/2) A \quad ,$$

$$q = e^- A^+ a_4 (\cos^2 \beta/2 - \sin^2 \beta/2) A = A^+ a_4 A \cos \beta = \rho \cos \beta = \Omega \quad .$$

La densité de moment électrique propre $\vec{e}(e_x, e_y, e_z)$ est donnée par

$$e_x = \mathcal{U}^+ i a_1 a_4 \mathcal{U} = A^+ i a_1 a_4 A - A^+ i a_1 a_4 a' A \sin \beta \quad ,$$

or, pour l'onde plane et dans le système propre, on a $A^+ i a_1 a_4 A = 0$, d'où :

$$e_x = A^+ i a_1 a_4 A \sin \beta ,$$

$$e_y = 4^+ i a_2 a_4 4 = A^+ i a_2 a_4 A - A^+ i a_2 a_4 a' A \sin \beta = A^+ i a_3 a_1 A \sin \beta$$

$$e_z = 4^+ i a_3 a_4 4 = A^+ i a_3 a_4 A - A^+ i a_3 a_4 a' A \sin \beta = A^+ i a_3 a_4 A \sin \beta$$

La densité de moment magnétique propre $\vec{h} (h_x, h_y, h_z)$ est donnée par

$$h_x = 4^+ i a_2 a_3 a_4 4 = A^+ i a_2 a_3 a_4 A \cos \beta ,$$

$$h_y = 4^+ i a_3 a_1 a_4 4 = A^+ i a_3 a_1 a_4 A \cos \beta ,$$

$$h_z = 4^+ i a_1 a_2 a_4 4 = A^+ i a_1 a_2 a_4 A \cos \beta .$$

La densité de spin est donnée par

$$s_x = 4^+ i a_2 a_3 4 = A^+ i a_2 a_3 (\cos \beta / 2 - a' \sin \beta / 2)^2 A = A^+ i a_2 a_3 A ,$$

$$s_y = 4^+ i a_3 a_1 4 = A^+ i a_3 a_1 A - A^+ i a_3 a_1 a' A \sin \beta = A^+ i a_3 a_1 A ,$$

$$s_z = 4^+ i a_1 a_2 4 = A^+ i a_1 a_2 A - A^+ i a_1 a_2 a' A \sin \beta = A^+ i a_1 a_2 A .$$

Or, dans le système propre, si l'on tient compte des relations $A_1 = A_2 = 0$, A_1, A_2, A_3, A_4 étant les éléments de la matrice unicolonne A , on voit que

$$A^+ i a_2 a_3 a_4 A = -A^+ i a_2 a_3 A, A^+ i a_3 a_1 a_4 A = -A^+ i a_3 a_1 A, A^+ i a_1 a_2 a_4 A = -A^+ i a_1 a_2 A.$$

D'où les relations attendues :

$$h_x = -s_x \cos \beta , \quad h_y = -s_y \cos \beta , \quad h_z = -s_z \cos \beta ,$$

$$e_x = s_x \sin \beta , \quad e_y = s_y \sin \beta , \quad e_z = s_z \sin \beta .$$

Comme enfin $\bar{\Omega} = A^+ a' (\cos \beta / 2 - a' \sin \beta / 2)^2 A = A^+ a' A - A^+ A \sin \beta = \rho \sin \beta$, on peut écrire

$$\vec{h} = -\Omega \sigma_3 , \quad \vec{e} = -\bar{\Omega} \sigma_3 .$$

Extension des résultats précédents.

Dans le pavé (P) le phénomène élémentaire est en général représenté par une superposition de cas purs $E_i (W_i, \vec{p}_i)$ en nombre fini ou infini. Soit tout d'abord $i = 1, 2, 3, \dots, n$, chaque repos relatif du négaton étant associé à une matrice $A_i = c_i B_i$, B_i étant l'amplitude normée de la i ème composante, de telle sorte que la probabilité de trouver

l'état E_i au repos est $|c_i^2|$. On posera $\sum |c_i^2| = \cos^2 \beta/2$. pour le positon $A_i' = a d_i B_i$ et la probabilité de trouver l'état $\bar{E}_i$ au repos est alors $\sum |d_i^2|$ et l'on posera $\sum |d_i^2| = \sin^2 \beta/2$.

Or la somme des matrices A_i est une matrice A et si l'on pose $c_i = \cos \beta/2 \ c_i'$, $d_i = \sin \beta/2 \ d_i'$, les matrices $\sum c_i' B_i$ et $\sum d_i' B_i$ sont normées ; l'onde ψ s'écrit donc sous la forme (41) ou sous la forme (45). Ceci revient à dire sous une forme un peu imprécise que tous les états au repos relatif d'un négaton (ou d'un positon) sont équivalents mais, mieux, que si l'on provoque le repos du phénomène élémentaire, on ne peut décider par la seule observation de ce repos de quel état dynamique $W_i, \vec{p}_i$ il provient. En ce sens, les résultats précédents sont très généraux et ils s'étendent de la même façon à un ensemble continu de cas purs ainsi qu'à un ensemble d'électrons non libres puisque, au repos relatif, ces électrons ne sont soumis à aucune force.

Les relations de Pauli-Kofink sont donc valables pour une solution tout à fait générale de l'équation de Dirac, interprétée au repos relatif pour l'observateur, et ce résultat sera mis très simplement en évidence à l'aide de l'algèbre réelle d'espace-temps quand nous aurons complété la théorie de D. Hestenes.

TROISIEME PARTIE

EQUATION DE DIRAC-HESTENES

Les résultats précédents vont être retrouvés par une autre voie qui utilise et complète l'interprétation de D.Hestenes de l'équation de Dirac. Nous rappellerons tout d'abord les résultats fondamentaux du calcul vectoriel introduit par les algèbres de Clifford ce qui nous permettra en particulier de préciser les définitions et les notations. Ce calcul a un caractère géométrique c'est-à-dire indépendant de la base choisie et est donc bien adapté à priori à l'objet de notre recherche.

I. Les algèbres de Clifford.

Soit un espace vectoriel V_r à n dimensions sur le corps des réels (ou $\mathbb{O}$ -vecteur) et dont les vecteurs (ou i -vecteur) sont désignés par $a, b, \dots$, ainsi qu'une forme bilinéaire symétrique réelle et définie sur V_n . On note $|a|^2$ la forme quadratique associée et l'on appelle $|a|^2$ $^{1/2}$ longueur de a .

On introduit sur V_n une multiplication associative, distributive mais non commutative en général, notée par simple juxtaposition. Si α est un scalaire, $\alpha a = a\alpha$ et $0a = a0 = 0$, tandis que 1 est un élément neutre.

On appelle produit intérieur de deux vecteurs a et b et l'on note $a.b$ la valeur réelle de la forme bilinéaire symétrique donnée. Si $a.b = 0$ les deux vecteurs sont dits orthogonaux. On sait qu'il existe dans V_n au moins une base $e_1, e_2 \dots e_n$ de vecteurs orthogonaux deux à deux. Soient p vecteurs de ces vecteurs e_i

($i = 1, 2, \dots, n$). On suppose que leur produit, appelé p -vecteur, est noté $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p = e_1 \cdot e_2 \dots e_p = Q_p$ et qu'il est complètement antisymétrique, c'est-à-dire qu'il change de signe si l'on permute deux vecteurs quelconques.

Les Q_p indépendants sont au nombre de C_n^p et sont la base d'un espace vectoriel à C_n^p dimensions dont un élément sera encore appelé p -vecteur, l'espace étant noté $V_n^{(p)}$.

On peut définir maintenant le produit extérieur de p vecteurs a_i et le noter :

$$A_p = a_1 \wedge a_2 \dots \wedge a_p \quad (1).$$

C'est un élément appelé p -vecteur de l'espace vectoriel $V_n^{(p)}$.

On remarque l'antisymétrie de A_p qui géométriquement représente le volume orienté défini par les p -vecteurs a_i . De plus, $A_p = 0$ si et seulement si les a_i sont liés; il en résulte nécessairement que $A_p = 0$ pour $p > n$.

Soit (V) l'espace vectoriel somme directe des espaces $V_n^{(0)}, V_n^{(1)} \dots V_n^{(p)} \dots V_n^{(n)}$, où $V_n^{(0)}$ est l'espace à une dimension des réels, tandis que $V_n^{(1)}$ est l'espace vectoriel donné V_n . L'espace (V) a $C_n^0 + \dots + C_n^n = 2^n$ dimensions, et l'on appelle nombre de Clifford ou c-nombre un élément de cet espace (V) c'est-à-dire une somme d'un scalaire, d'un vecteur, d'un bivecteur, ..., d'un n -vecteur ou pseudo-scalaire, la décomposition d'un c -nombre en ces différentes parties étant évidemment unique.

On définit le produit intérieur d'un vecteur a par un p -vecteur A_p en écrivant :

$$a \cdot A_p = a \cdot (a_1 \wedge \dots \wedge a_p) = \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) a_1 \wedge \dots \wedge a_{k-1} \wedge a_{k+1} \wedge \dots \wedge a_p. \quad (2)$$

On remarque que, si a est orthogonal à tous les a_k , le produit $a \cdot A_p = 0$.

Nous pouvons maintenant définir en toute généralité le

produit d'un vecteur a par un p -vecteur A_p en posant :

$$a \cdot A_p = a \cdot A_p + a \wedge A_p \quad (3) .$$

En particulier pour $p = 1$ on obtient le produit de deux vecteurs a et b :

$$ab = a \cdot b + a \wedge b , \text{ d'où :}$$

$a \cdot b = \frac{1}{2} (ab + ba)$ et $a \wedge b = \frac{1}{2} (ab - ba)$ pour le bivecteur ainsi défini indépendamment de la base.

On voit que $a \cdot A_p$ est la somme d'un $(r-1)$ vecteur et d'un $(r+1)$ vecteur. Ces définitions permettent de calculer de proche en proche le produit de deux c -nombres quelconques .

On remarque que $a \wedge A_p = (-1)^p A_p \wedge a$ par suite de l'antisymétrie de A_p et on en déduit très généralement :

$$A_p \wedge B_q = (-1)^{pq} B_q \wedge A_p \quad (4) ,$$

B_q étant un q -vecteur quelconque.

Le produit intérieur de A_p et de B_q se définit par récurrence pour $p \leq q$ par

$$A_p \cdot B_q = A_{p-1} \cdot (a_p \cdot B_q) \quad (5)$$

d'où :

$$A_p \cdot B_q = (-1)^p \cdot (q+1) B_q \cdot A_p \text{ pour } p \leq q \quad (6) .$$

Signalons la formule

$$A_{p+1} = a \wedge A_p = \frac{1}{2} (a A_p + (-1)^p A_p a) = a \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_p \quad (7)$$

ainsi que :

$$a \cdot A_p = \frac{1}{2} (a A_p + (-1)^{p+1} A_p a) \quad (8) .$$

On désigne enfin par le symbole i le pseudo-scalaire orienté Q_r lorsque tous les e_i sont unitaires et, si A est un nombre de Clifford, le nombre iA est le dual de A , lorsque $i^2 = -1$.

II . L'algèbre d'espace de Pauli

Dans l'espace euclidien R_3 on choisit trois vecteurs unitaires orthogonaux notés $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_i \cdot \sigma_j = \delta_i^j$, symbole de Kronecker (9)).

L'algèbre de Clifford qui en résulte est appelée algèbre de Pauli et ses éléments des p-nombres .

Le bivecteur $\sigma_{ij} = \sigma_i \wedge \sigma_j$ est l'aire unitaire orientée du plan défini par σ_i et σ_j ($i, j = 1, 2, 3$).

Le trivecteur unitaire de base est l'élément de volume orienté :

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i \quad (i^2 = -1) \quad (10)$$

qui commute avec tout vecteur $a = a^k \sigma_k$.

Si l'on change le sens de la base, c'est-à-dire si l'on retourne la direction d'un nombre impair de vecteurs de base, i se change en $-i$, et ce résultat est évidemment général en algèbre de Clifford.

Un p-nombre A quelconque se décompose suivant :

$$A = A_S + A_V + A_B + A_P \quad (11)$$

A_S, A_V, A_B, A_P étant respectivement scalaire, vecteur, bivecteur, trivecteur. Les relations

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 = i \sigma_3, \quad \sigma_2 \wedge \sigma_3 = i \sigma_1, \quad \sigma_3 \wedge \sigma_1 = i \sigma_2$$

montrent qu'un bivecteur est le dual d'un vecteur. En écrivant ce vecteur sous la forme d'un "cross product" de vecteurs nous définissons le produit vectoriel élémentaire habituel $a \times b$:

$$a \wedge b = i (a \times b) \quad (12)$$

$$\text{ou encore} \quad a \times b = i (a \wedge b) \quad (13).$$

Dans un changement du sens de la base, i se changeant en $-i$, on voit que $a \times b$ change de sens puisque le bivecteur reste invariant comme tenseur. Il résulte de (12) que toutes les formules du calcul vectoriel élémentaire sont obtenues en utilisant les règles de l'algèbre

de Clifford. Ainsi :

$$a \times (b \times c) = - (a \cdot b) c + (a \cdot c) b \quad (14)$$

$$\text{et } a \wedge b \wedge c = -i (a \cdot (b \times c)) \quad (15)$$

ce qui montre que le produit mixte ordinaire $(a \cdot (b \times c))$ est le dual du trivecteur $a \wedge b \wedge c$.

Un p-nombre quelconque s'écrit :

$$A = \alpha + \beta + a_1 + ia_2,$$

a_1 et a_2 étant des vecteurs, α et β des scalaires.

Définissons l'opérateur différentiel gradient

$$\nabla = \sigma^k \partial_k \text{ avec } \sigma^k = \sigma_k \text{ et } \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (16)$$

De $\nabla a = \nabla \cdot a + \nabla \wedge a$ on déduit la divergence scalaire $\nabla \cdot a$ de a et le bivecteur $\nabla \wedge a$, relié au rotationnel ordinaire par (12) et (13)

$$\nabla \wedge a = i (\nabla \times a)$$

III. L'algèbre d'espace-temps de Dirac.

Dans l'espace-temps la métrique est pseudo-euclidienne, les éléments de l'algèbre réelle d'espace-temps ou algèbre de Dirac étant des d-nombres.

Si $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont les vecteurs de base, on pose :

$$\gamma_0^2 = 1, \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1, \gamma_i \cdot \gamma_j = 0 \\ \text{avec } i, j = 1, 2, 3, 0 \quad (17)$$

ou en abrégé : $\gamma_i \cdot \gamma_j = g_{ij}$.

Un vecteur $a = a^i \gamma_i$ est temporel si

$a^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2$ est positif, spatial si a^2 est négatif, et isotrope si $a^2 = 0$.

Le bivecteur $\gamma_i \wedge \gamma_j = \gamma_i \gamma_j = \frac{1}{2} (\gamma_i \gamma_j - \gamma_j \gamma_i)$ est l'élément orienté du plan γ_i, γ_j , et le trivecteur $\gamma_i \wedge \gamma_j \wedge \gamma_k$ ($k = 1, 2, 3, 0$) est l'élément orienté du volume tridimensionnel.

Le pseudo-scalaire $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = i$ ($i^2 = -1$) est l'élément orienté du volume à 4-dimensions.

De $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -i \gamma_0$, $\gamma_2 \gamma_3 \gamma_0 = -i \gamma_1$,

$\gamma_3 \gamma_1 \gamma_0 = -i \gamma_2$, $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 = -i \gamma_3$ on déduit que le dual d'un trivecteur est un vecteur et réciproquement. Un d-nombre quelconque Λ se décompose en

$$\Lambda = \Lambda_S + \Lambda_V + \Lambda_B + \Lambda_T + \Lambda_P$$

Λ_T étant un trivecteur et Λ_P un pseudo-scalaire.

L'opération qui renverse le sens de tous les vecteurs est notée $\bar{}$. D'où

$$\bar{\Lambda} = \Lambda_S - \Lambda_V + \Lambda_B - \Lambda_T + \Lambda_P \quad (18).$$

Si $\Lambda = \bar{\Lambda}$, le d-nombre Λ est dit pair, si $\Lambda = -\bar{\Lambda}$ il est dit impair.

L'opération qui renverse l'ordre des vecteurs dans tous les produits de vecteurs est appelée renversement et est notée $\sim$. D'où :

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda_S + \Lambda_V - \Lambda_B - \Lambda_T + \Lambda_P \quad (19)$$

Voici deux remarques en ce qui concerne les vecteurs.

a/ i anticommute avec tous les γ_i et par conséquent avec tout vecteur ;

b/ tout vecteur $a = a^0 \gamma_0 + a^1 \gamma_1 + a^2 \gamma_2 + a^3 \gamma_3$, non isotrope, admet au moins un inverse $a^{-1} = a / (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$.

En effet, $a^1 \gamma_1 + a^2 \gamma_2 + a^3 \gamma_3$ et $a'^2 = -(a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2$ de telle sorte que $(a^0)^2 + (a')^2$ est un scalaire non nul si a n'est pas isotrope, d'où le résultat.

Nous utiliserons également dans la suite la base duale définie par

$$\gamma^0 = \gamma_0, \quad \gamma^k = -\gamma_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

On vérifie immédiatement $\gamma^j \gamma_j = 4 \quad (j = 1, 2, 3, 0)$

et

$$\gamma^j a \gamma_j = -2a$$

si a est un vecteur.

Bivecteurs.

Voici des définitions et des résultats importants concernant les bivecteurs.

Le carré d'un bivecteur est la somme d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire.

Soit $B = \gamma \gamma_0 + i \gamma' \gamma_0$, γ et γ' étant des vecteurs d'espace.

$$\begin{aligned} B^2 &= (\gamma \gamma_0 + i \gamma' \gamma_0)^2 = \gamma \gamma_0 \gamma \gamma_0 + i \gamma \gamma_0 \gamma' \gamma_0 + i \gamma' \gamma_0 \gamma \gamma_0 - \gamma' \gamma_0 \gamma' \gamma_0 \\ &= -\gamma^2 - 2i \gamma \cdot \gamma' + \gamma'^2 = \gamma'^2 - \gamma^2 - 2i \gamma \cdot \gamma', \text{ d'où le résultat.} \end{aligned}$$

D'où les définitions :

a/ Un bivecteur de carré scalaire est dit simple : il faut et il suffit que $\gamma \cdot \gamma' = 0$, c'est-à-dire que γ et γ' soient orthogonaux.

Le bivecteur est dit temporel si $\gamma'^2 > \gamma^2$, spatial si $\gamma'^2 < \gamma^2$, isotrope si $\gamma'^2 = \gamma^2$.

b/ Un bivecteur est dit composé s'il n'est pas simple.

Voici un théorème important.

Tout bivecteur composé B est la somme de deux bivecteurs simples $S_1 B_1$ et $S_2 B_2$, l'un spatial, l'autre temporel, où S_1 et S_2 sont scalaires, B_1 et B_2 duaux tels que $B_1 \cdot B_2 = 0$ et $B_1 B_2 = -B_2 B_1$ pseudo-scalaire.

Posons $B_1 = \exp i \varphi B$ (20) et formons $B_1^2 = \exp 2i \varphi B^2 = \exp 2i \varphi (\gamma'^2 - \gamma^2 - 2i \gamma \cdot \gamma') = (\gamma'^2 - \gamma^2) \cos 2\varphi + 2 \sin 2\varphi (\gamma \cdot \gamma') + i (\gamma'^2 - \gamma^2) \sin 2\varphi - 2i \cos 2\varphi (\gamma \cdot \gamma')$.

Si $\gamma'^2 - \gamma^2 \neq 0$ on peut prendre $\tan 2\varphi = 2 \gamma \cdot \gamma' / (\gamma'^2 - \gamma^2)$ pour B_1^2 réel.

Si $\gamma^2 - \gamma'^2 = 0$ et si $\gamma \cdot \gamma' \neq 0$ il existe encore un angle φ mais si $\gamma^2 - \gamma'^2 = 0$ et si $\gamma \cdot \gamma' = 0$, c'est-à-dire si $B^2 = 0$ l'angle φ n'existe pas mais dans ce cas B est simple.

Si donc $B^2 \neq 0$, $B = \exp -i \varphi B_1$ selon (20) s'écrit

$$B = B_1 \cos \varphi - B_2 \sin \varphi \quad \text{avec} \quad B_2 = i B_1 \quad (21).$$

ce qui achève de démontrer la proposition car i commute avec tout bivecteur et $B_2^2 = (i B_1)^2 = -B_1^2$ tandis que $B_1 B_2$ qui est égal à $B_2 B_1$ est un pseudo-scalaire.

Application

Si $\mathcal{A}$ est un d-nombre pair, alors $\mathcal{A} \tilde{\mathcal{A}} = h + i k$, h et k étant réels.

Comme $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$, on peut poser $\mathcal{A} = S + B + P$, et donc $\tilde{\mathcal{A}} = S - B + P$, S étant un scalaire, B un bivecteur et P un pseudo-scalaire.

Formons $\mathcal{A} \tilde{\mathcal{A}} = (S + B + P)(S - B + P) = S^2 - B^2 + P^2 + 2PS$, ce qui démontre la proposition.

Rotations de Lorentz.

La transformation $a' = R a S$ définit un endomorphisme de l'espace-temps, or les vecteurs et eux seuls satisfont aux conditions

$$\bar{a} = -a \quad \text{et} \quad \tilde{a} = a.$$

D'où $\bar{a}' = -a' = \bar{R} a \bar{S}$ ce qui implique $R = \bar{R}$ (22)

et $\tilde{a}' = a' = \tilde{S} a \tilde{R}$ qui implique $R = \tilde{S}$, c'est-à-dire $S = \tilde{R}$.

En définitive on posera

$$a' = R a \tilde{R} \quad (23)$$

pour écrire un endomorphisme d'espace-temps, R étant un d-nombre pair quelconque donné et a parcourant l'espace-temps. Cet ensemble d'endomorphismes contient les isométries c'est-à-dire ceux qui conservent les "longueurs" et donc tels que $a'^2 = a^2$. En effet

$$a'^2 = R a \tilde{R} R a \tilde{R} \quad (24)$$

mais $R \tilde{R} = h + ik$ d'après le théorème précédent puisque $R = \bar{R}$.

$$a'^2 = R a (h + ik) a \tilde{R} = R a^2 h \tilde{R} - i R a^2 k \tilde{R} \text{ ou encore}$$

$$1 = h(h + ik) - ik(h + ik) = h^2 + k^2, \text{ d'où } R \tilde{R} = \exp i\varphi \quad (25)$$

Posons $R = R_1 \exp i\varphi / 2$. On obtient :

$$a' = R_1 \exp i\varphi / 2 a \exp i\varphi / 2 \tilde{R}_1 = R_1 a \tilde{R}_1.$$

On peut donc choisir $\varphi = 0$ en toute généralité et écrire désormais les conditions $R = \bar{R}$ (22) et $R \tilde{R} = 1$ (25), nécessaires et suffisantes pour que l'endomorphisme soit une isométrie.

$$\text{De plus } R \gamma_0 \tilde{R} \gamma_1 \tilde{R} \gamma_2 \tilde{R} \gamma_3 \tilde{R} = \gamma'_0 \gamma'_1 \gamma'_2 \gamma'_3 = 1$$

$R \gamma_2 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 \tilde{R} = R i \tilde{R} = i$, ce qui montre que le sens de la base est conservé : l'endomorphisme est bien ainsi une rotation de Lorentz.

Les conditions (22) et (25) permettent de compléter le résultat précédent par le théorème :

Si $R = \bar{R}$ et si $R \tilde{R} = 1$, alors $R = \exp T$ ou $R = -\exp T$, T étant un bivecteur.

Puisque $R = \bar{R}$ on pose $R = S + B + P$ mais $B = S_1 B_1 + S_2 B_2$ d'après le théorème précédent et donc, puisque B_1 et B_2 commutent :

$$R \tilde{R} = 1 = S^2 - S_1^2 B_1^2 - S_2^2 B_2^2 - 2 S_1 S_2 B_1 B_2 + B^2 + 2 P S,$$

d'où les conditions, si $B^2 \neq 0$:

$$1 = S^2 - S_1^2 B_1^2 - S_2^2 B_2^2 + P^2$$

$$PS = S_1 S_2 B_1 B_2.$$

Les bivecteurs B_1 et B_2 étant définis à un facteur réel près, on peut choisir $B_1 B_2 = P$ et donc $S_1 S_2 = S$ et R s'écrit :

$$R = S_1 S_2 + S_1 B_1 + S_2 B_2 = (S_1 + B_2) (S_2 + B_1).$$

La condition $\tilde{R}R = 1$ exige alors :

$$(S_1^2 - B_2^2) (S_2^2 - B_1^2) = 1.$$

On peut choisir $S_1^2 - B_2^2 = 1$ et, si l'on suppose B_2 spatial, il existe T_2 tel que $S_1 = \cos T_2$, $B_2 = i \sin T_2$, les sinus et les cosinus étant définis par leur développement en série de telle sorte que $\cos T_2$ est un scalaire et que $B_2 = iT_2 (1 - T_2^2/6 + T_2^4/120 - \dots) = im T_2$, m étant scalaire et donc T_2^2 positif.

$$\text{D'où } S_1 + B_2 = \cos T_2 + i \sin T_2 = \exp iT_2.$$

De même, T_1^2 étant positif puisque $S_1 B_1$ est temporel, il existe T_1 tel que $S_2 = \cosh T_1$ et $B_1 = \sinh T_1 = T_1 (1 + T_1^2/6 + \dots) = m'T_1$, m' étant scalaire.

En définitive, $R = \exp iT_2 \cdot \exp T_1 = \exp (T_1 + iT_2)$ puisque T_1 et T_2 commutent comme B_1 et B_2 .

Dans le cas particulier $B^2 = 0$, la condition $\tilde{R}R = 1$ devient

$$1 = S^2 + P^2 \text{ et } SP = 0.$$

Puisque $P^2 \ll 0$, on doit avoir $P = 0$ et $S^2 = 1$.

Si $S = +1$, $R = 1 + B = \sum 1/n! B^n = \exp B$, puisque $B^2 = 0$.

Si $S = -1$, $R = -1 + B = -(1 - B) = -\exp(-B)$, puisque $B^2 = 0$.

Voici une conséquence.

Si $\mathcal{V}$ est un d-nombre pair il existe un angle β compris entre 0 et 2π , un nombre positif ρ et un bivecteur T tel que

$$\mathcal{U} = \bar{\tau} \rho^{1/2} \exp i \beta / 2 \exp T \quad (27)$$

En effet, $\mathcal{U}$ étant pair, $\mathcal{U} \tilde{\mathcal{U}} = h + ik = \rho \exp i \beta$ (28)

ρ et β étant les modules et argument de $h + ik$. Posons :

$$\mathcal{U} = \rho^{1/2} \exp i \beta / 2 R.$$

La condition $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}$ exige $R' = \tilde{R}$ et (28) exige $R \tilde{R} = 1$, donc R est une rotation de Lorentz, et $R = \pm \exp T$ d'où la forme (27).

Ce résultat est fondamental pour l'interprétation de l'équation de Dirac en théorie de D.Hestenes.*)

Sous-algèbre d'espace associée.

L'algèbre de Pauli $\mathcal{P}$ représente les propriétés de l'espace et l'algèbre de Dirac celles de l'espace-temps. Les vecteurs σ_i et γ_i représenteront les mêmes vecteurs d'espace s'ils sont proportionnels. En posant

$$\sigma_i = \gamma_i \gamma_0 \quad (29)$$

on satisfait aux conditions (9). Il s'ensuit que $\sigma_{ij} = -\gamma_i \gamma_j$ et que $i = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \gamma_1 \gamma_0 \gamma_2 \gamma_0 \gamma_3 \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$.

L'algèbre de Pauli ainsi associée sera appelée algèbre de Pauli de

γ_0 ; ses éléments sont les d-nombres pairs. Les éléments impairs de l'algèbre de Dirac sont les éléments de $\mathcal{P}$ multipliés par γ_0 .

Ainsi un vecteur a de cette algèbre sera représenté par

$$a \gamma_0 = a_0 + \vec{a} \quad (30)$$

a_0 étant un scalaire et $\vec{a}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ et nous désignerons par une flèche ces vecteurs d'espace associée. On obtient

$$a_0 = a \cdot \gamma_0 \text{ et } \vec{a} = a \wedge \gamma_0 \quad (31)$$

car $a = a^1 \gamma_0 + a^2 \gamma_2 + a^3 \gamma_3 + a^0 \gamma_0$, ce qui implique

*) Pour l'algèbre d'espace-temps, nous nous réfèrons essentiellement à D.Hestenes "Space-time algebra" Gordon and Breach, New-York 1966.

$$a \gamma_0 = a^0 + a^1 \gamma_1 \gamma_0 + a^2 \gamma_2 \gamma_0 + a^3 \gamma_3 \gamma_0 = a^0 + a^1 \gamma_1 + a^2 \gamma_2 + a^3 \gamma_3.$$

On désignera l'opération de conjugaison d'espace par

$$A^* = \gamma_0 A \gamma_0$$

car, appliquée au vecteur a , on obtient

$$a^* = \gamma_0 a \gamma_0 = a^0 \gamma_0 - (a^1 \gamma_1 + a^2 \gamma_2 + a^3 \gamma_3)$$

et la conjugaison hermitienne sera notée

$$A^+ = \gamma_0 \tilde{A} \gamma_0 = \tilde{A}^*.$$

Il résulte de ce qui vient d'être dit qu'un d-nombre quelconque φ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi = \Phi + \chi \gamma_0 \quad (32)$$

où Φ et χ sont des p-nombres, Φ représentant la partie paire de φ et $\chi \gamma_0$ la partie impaire.

Introduisons enfin le gradient, opérateur de dérivation en posant

$$\square = \gamma^\mu \partial_\mu \quad \text{avec} \quad \gamma^0 = \gamma_0, \quad \gamma^k = -\gamma_k \quad \text{avec} \\ k = 1, 2, 3 \text{ et } \partial_\mu \text{ défini par (16).}$$

Si A est un d-nombre dérivable :

$$\square A = \square \cdot A + \square \wedge A,$$

$\square \cdot A$ étant la divergence et $\square \wedge A$ le rotationnel d'espace-temps.

Rappelons que $\nabla = \gamma^k \partial_k = \gamma_k \gamma_0 \partial_k = -\gamma^k \gamma_0 \partial_k$:

Donc : $\nabla = \gamma_0 \wedge \square$ et $\partial_0 = \gamma_0 \cdot \square$, c'est-à-dire que :

$$\gamma_0 \square = \partial_0 + \nabla \quad (33).$$

Le carré $\square^2 = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$ est un opérateur scalaire appelé d'Alembertien.

IV. Electrodynamique.

Nous rappelons les résultats fondamentaux de l'électrodynamique écrits dans l'algèbre réelle d'espace-temps, en nous référant essentiellement à D. Hestenes.

Un champ électromagnétique est représenté par un bivecteur F et

si J est le courant de densité de charge les équations de Maxwell-Lorentz s'écrivent sous la forme condensée^{*)} :

$$\square F = J \quad (34)$$

Or $F = \vec{E} + i\vec{B}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant les champs électrique et magnétique. Ecrivons $J = (J \gamma_0) \gamma_0 = (J \cdot \gamma_0 + J \wedge \gamma_0) \gamma_0 = \rho + \vec{J}$, ρ désignant la densité de charge et $\vec{J}$ le courant d'espace.

Or $\gamma_0 \square F = (\partial_0 + \nabla) (\vec{E} + i\vec{B}) = \gamma_0 (\rho + \vec{J}) \gamma_0 = \rho - \vec{J}$, soit $\partial_0 \vec{E} + \nabla \vec{E} + i(\partial_0 \vec{B} + \nabla \vec{B}) = \rho - \vec{J}$ et, en séparant les scalaire, vecteur, bivecteur et pseudo-scalaire :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \\ \partial_0 \vec{E} + i \nabla \wedge \vec{B} &= -\vec{J} \quad \text{ou} \quad \partial_0 \vec{E} - \nabla \times \vec{B} = -\vec{J} \\ i \partial_0 \vec{B} + \nabla \wedge \vec{E} &= 0 \quad \text{ou} \quad \partial_0 \vec{B} + \nabla \times \vec{E} = 0 \\ i \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

qui ne sont autres que la forme habituelle de (34).

Introduisons le vecteur potentiel A défini par

$$F = \square A = \square \cdot A + \square \wedge A \quad (36)$$

et comme F est un bivecteur, $F = \square \wedge A$ et $\square \cdot A = 0$.

Ce vecteur A n'est pas unique car on peut lui ajouter le gradient d'un scalaire χ pour qui $\square^2 \chi = 0$. Si, en effet :

$$A' = A + \square \chi$$

alors $\square A' = \square A + \square^2 \chi = \square A$.

Enfin, exprimons les champs à l'aide du potentiel.

$$\begin{aligned} A \gamma_0 &= A_0 + \vec{A} \\ F &= \vec{E} + i\vec{B} = \square A = (\square \gamma_0) (\gamma_0 \vec{A}), \\ &= (\partial_0 - \nabla) (A_0 - \vec{A}) \\ &= -(\partial_0 A_0 + \nabla A_0) + \nabla \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

soit $\vec{E} = -\partial_0 \vec{A} - \nabla A_0$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (37).

*) Marcel Riesz, Clifford Numbers and Spinors, Lecture série n° 38. Maryland (1958).

V. Spineurs.

Une algèbre de Clifford sur V_n a une structure d'anneau. Il existe en effet un groupe additif abélien par suite de la structure d'espace vectoriel et une loi, non commutative en général, de multiplication interne distributive par rapport à l'addition. Si la sous-algèbre des réels et des complexes a une structure de corps, il n'en est pas ainsi en général puisque dans l'algèbre de Dirac par exemple un vecteur isotrope non nul n'a pas d'inverse.

Il existe par contre des idéaux d'anneau et on appelle spineurs tout élément d'un idéal principal (ou minimal) gauche c'est-à-dire d'un idéal dans tous les éléments sont obtenus à partir de l'un d'entre eux bien spécifié par multiplication à gauche d'un élément quelconque de l'algèbre. L'idéal principal obtenu en échangeant l'ordre de ces deux facteurs dans le produit est l'idéal droite dit conjugué et un de ses éléments est appelé spineur conjugué.

a) - Spineurs de Pauli.

Un p-nombre γ peut s'écrire en toute généralité :

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_i \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

les γ_0, γ_i étant des nombres complexes, puisqu'un bivecteur de Pauli n'est autre que le dual d'un vecteur.

Choisissons maintenant un vecteur unitaire, soit σ_3 .

On peut écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} \gamma (1 + \sigma_3) + \frac{1}{2} \gamma (1 - \sigma_3) = \gamma_+ + \gamma_-$$

en posant $\gamma_+ = \frac{1}{2} \gamma (1 + \sigma_3)$, $\gamma_- = \frac{1}{2} \gamma (1 - \sigma_3)$.

$$\text{En conséquence} \quad \gamma \sigma_3 = \gamma_+ - \gamma_-$$

L'ensemble des γ_+ et l'ensemble des γ_- sont deux idéaux principaux. Montrons qu'ils sont indépendants et déterminons une base. Pour cela développons :

$$\psi_+ = \frac{1}{2} (\psi_0 + i\psi_1 \sigma_1) (1 + \sigma_3) = \frac{1}{2} \psi_0 (1 + \sigma_3) + \frac{1}{2} (i\psi_1 \sigma_1 - i\psi_2 \sigma_2 + i\psi_3 \sigma_3), \text{ car } \sigma_1 \sigma_3 = -i\sigma_2 \text{ et } \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1.$$

Donc :

$$\psi_+ = \frac{1}{2} (\psi_0 + \psi_3) (1 + \sigma_3) + \frac{1}{2} (\psi_1 + i\psi_2) (1 - \sigma_3) \sigma_1.$$

De même $\psi_- = \frac{1}{2} (\psi_0 + i\psi_1 \sigma_1) (1 - \sigma_3) =$
 $\frac{1}{2} (\psi_0 - \psi_3) (1 - \sigma_3) + \frac{1}{2} (\psi_1 - i\psi_2) (1 + \sigma_3) \sigma_1.$

Or 1, σ_3 , σ_1 , $\sigma_1 \sigma_3 = -i\sigma_2$ forment une base, donc

$$\alpha (1 + \sigma_3) + \beta (1 - \sigma_3) \sigma_1 + \gamma (1 - \sigma_3) + \delta (1 + \sigma_3) \sigma_1 = 0$$

implique :

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \beta + \delta = 0, \quad \alpha - \gamma = 0, \quad -\beta + \delta = 0,$$

c'est-à-dire $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, ce qui

démontre la propriété.

b) - Spineurs de Dirac.

de même si φ est un d-nombre, nous écrirons :

$$\varphi = \frac{1}{2} \varphi (1 + \sigma_3) + \frac{1}{2} \varphi (1 - \sigma_3)$$

avec $\varphi_+ = \frac{1}{2} \varphi (1 + \sigma_3)$ et $\varphi_- = \frac{1}{2} \varphi (1 - \sigma_3)$ qui sont deux idéaux principaux indépendants en algèbre réelle de Dirac.

$$\text{Décomposons } \varphi \text{ en } \varphi = \Phi + \chi \gamma_0 \quad (38)$$

où Φ et χ sont des nombres de l'algèbre de Pauli associée à γ_0 . Donc $\varphi_+ = \frac{1}{2} (\Phi + \chi \gamma_0) (1 + \sigma_3) = \frac{1}{2} (\Phi + \chi \gamma_0) + (\Phi_+ - \Phi_- - \chi_+ \gamma_0 + \chi_- \gamma_0)$

$$\text{soit : } \varphi_+ = \Phi_+ + \chi_- \gamma_0 \quad (39)$$

et, de même :

$$\varphi_- = \frac{1}{2} (\Phi + \chi \gamma_0) (1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} (\Phi + \chi \gamma_0) - \frac{1}{2} (\Phi_+ - \Phi_- + \chi_+ \gamma_0 - \chi_- \gamma_0) \text{ soit :}$$

$$\varphi_- = \Phi_- + \chi_+ \gamma_0 \quad (40).$$

VI - Equation de Dirac

a) Récrivons l'équation de Dirac (27 II) avec $m = 1, 2, 3$:

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - ke^{-} / c V - \sum a_m (\partial / \partial x_m + ke^{-} / c A_m) - km_0 ca_4 \right] \varphi = 0 ;$$

posons $e = e^{-} 2\pi / hc$, $m = 2\pi m_0 c / h$. D'où :

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - ieV - \sum a_m (\partial / \partial x_m + ieA_m) - \partial_4 m \right] \varphi = 0 ,$$

$$\text{soit } \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \sum a_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \varphi = [e(V + \sum a_m A_m) + \partial_4] \varphi .$$

Multiplions à gauche par a_4 :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} a_4 - \sum a_4 a_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \varphi = [e(a_4 V + \sum a_4 a_m A_m) + m] \varphi \quad (41)$$

Posons $x^0 = x_0 = ct$, $x_m = -x^m$, $\gamma^0 = a_4$, $\gamma^m = a_4 a_m$, d'où $(\gamma^0)^2 = 1$,
 $(\gamma^m)^2 = -1$, $\gamma^u \gamma^{u'} + \gamma^{u'} \gamma^u = 0$ ($u, u' = 1, 2, 3, 0$).

L'équation (41) s'écrit avec $A = A_u \gamma^u$ et $A_0 = V$:

$$(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^m \partial_m) \varphi = (m + e A) \varphi \quad (42)$$

Considérons maintenant les γ non comme des matrices mais comme des vecteurs et φ comme un d-nombre ; on obtient avec les notations déjà indiquées :

$$\square \varphi = (m + eA) \varphi \quad (43)$$

Posons $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ et multiplions à droite par ζ_3 les deux membres. On obtient :

$$\square (\varphi_+ + \varphi_-) \zeta_3 = (m + eA) \varphi \zeta_3 i = (m + eA) (\varphi_+ - \varphi_-) i \quad (44)$$

ou

$$\square (\varphi_+ - \varphi_-) = (m + eA) (\varphi_+ - \varphi_-) i \text{ et, en ajoutant avec (43) :}$$

$$\square \varphi_+ = (m + eA) \varphi_+ i \quad (45)$$

On obtient également par soustraction :

$$\square \varphi_- = (m + eA) \varphi_- i \quad (45 \text{ bis}).$$

Les équations (45) et (45 bis) sont équivalentes à l'équation (43) de Dirac écrite dans l'algèbre réelle d'espace-temps. Ici les spineurs de Dirac φ_+ et φ_- sont séparément solutions de l'équation (43) de Dirac.

Nous allons montrer qu'il suffit d'une seule équation (45) ou (45 bis) pour décrire l'électron, et nous utiliserons pour effectuer cette démonstration une transformation de ces équations qui introduit en définitive à la place d'un spineur de Dirac une somme ψ de deux spineurs de Pauli.

b) Soit tout d'abord l'équation (45) :

$$\square \varphi_+ = (m + eA) \varphi_+ i$$

Cette équation est réécrite en décomposant les deux membres en parties paire et impaire après remplacement de φ_+ à l'aide de (39) par :

$$\varphi_+ = \phi_+ + \chi_- \gamma_0.$$

On obtient ainsi :

$$\square \phi_+ = m \chi_- \gamma_0 i + eA \phi_+ i \quad (46)$$

$$\square \chi_- \gamma_0 = m \phi_+ i + eA \chi_- \gamma_0 i \quad (47).$$

Multiplions (47) à droite par γ_0 , d'où :

$$\square \chi_- = m \phi_+ i \gamma_0 + eA \chi_- \gamma_0 i \gamma_0 \text{ c'est-à-dire}$$

$$\square \chi_- = -m \phi_+ \gamma_0 i - eA \chi_- i \quad (48).$$

Multiplions (46) et (48) à droite par σ_3 et tenons compte de

$$\phi_+ \sigma_3 = \phi_+ \quad \text{et de} \quad \chi_- \sigma_3 = -\chi_- \quad , \text{ d'où}$$

$$\square \phi_+ = (m \chi_- \gamma_0 + eA \phi_+) i \sigma_3$$

$$\square \chi_- = (m \phi_+ \gamma_0 + eA \chi_-) i \sigma_3.$$

Additionnons ces deux dernières équations en posant

$$\psi = \phi_+ + \chi_- \quad (49)$$

On obtient :

$$\square \psi = (m \psi \gamma_0 + eA \psi) i \sigma_3 \quad (50).$$

Nous appellerons cette équation qui est la base de la théorie de l'électron en algèbre réelle d'espace-temps, équation de Dirac-Hestenes. Ici Ψ est la somme de deux spineurs de Pauli, c'est-à-dire un p-nombre.

On remarque que, réciproquement, on peut, de (50), déduire (45).

c) Soit maintenant l'équation (45 bis) sur laquelle nous effectuons les mêmes transformations. On obtient en remplaçant Ψ à l'aide de (40) par $\Phi_- + X_+ \gamma_0$:

$$\square \Phi_- = m X_- \gamma_0 i + eA \Phi_- i \quad (46 \text{ bis})$$

$$\square X_- \gamma_0 = m \Phi_- i + eA X_+ \gamma_0 i \quad (47 \text{ bis}), \text{ et}$$

$$\square X_+ = -m \Phi_- \gamma_0 i - eA X_+ i \quad (48 \text{ bis})$$

Multiplions (46 bis) et (48 bis) à droite par γ_3 et tenons compte de :

$$\Phi_- \gamma_3 = -\Phi_- , \quad X_+ \gamma_3 = X_+ , \text{ d'où :}$$

$$\square \Phi_- = -(m X_+ \gamma_0 + eA \Phi_-) i \gamma_3$$

$$\square X_+ = -(m \Phi_- \gamma_0 + eA X_+) i \gamma_3 .$$

Additionnons en posant :

$$\Psi_1 = \Phi_- + X_+ ,$$

on obtient :

$$\square \Psi_1 = -(m \Psi_1 \gamma_0 + eA \Psi_1) i \gamma_3 \quad (50 \text{ bis}).$$

On remarque que réciproquement on peut déduire (45 bis) de (50 bis). Il est naturel de considérer que (50 bis) comme (50) est relative au même champ extérieur A puisqu'elles se déduisent toutes deux de (43). Or si Ψ est lié à l'état (e^-, m) , Ψ_1 est lié à l'état $(e^+, -m)$ puisque l'on passe de (50) à (50 bis) en changeant m en $-m$ et e en $-e$. Ainsi les énergies non potentielles, symbolisées

ici par m et $-m$, sont de signes contraires.

Mais (50) admet des solutions à énergies négatives comme on le voit aisément en l'absence de champ et il existe par conséquent des solutions ψ de (50) correspondant à l'état $(e^-, -m)$ et donc des solutions ψ_1 de (50 bis) correspondant à l'état (e^+, m) .

Comme les états à énergie négative sont interprétés physiquement par la théorie des trous, ψ correspond en définitive aux états observables (e^-, m) et (e^+, m) comme ψ_1 .

Ainsi, c'est avec l'aide de la théorie des trous que les équations (50) et (50 bis) sont physiquement équivalentes, de telle sorte que nous conserverons seulement l'une d'entre elles, à savoir (50), ainsi physiquement équivalente à l'équation de Dirac.

d/ Expression du φ_+ de Dirac en fonction du ψ de D. Hestenes.

De $\varphi_+ = \Phi_+ + \chi_- \gamma_0$ et de $\psi = \Phi_+ + \chi_-$, on déduit :

$$\psi \sigma_3 = \Phi_+ - \chi_- \text{ et } \frac{1}{2} \psi (1 + \sigma_3), \quad \chi_- = \frac{1}{2} \psi (1 - \sigma_3).$$

$$\text{D'où : } \varphi_+ = \frac{1}{2} \psi (1 + \sigma_3) + \frac{1}{2} \psi (1 - \sigma_3) \gamma_0 = \frac{1}{2} \psi (1 + \sigma_3) (1 + \gamma_0) \quad (51)$$

Ce résultat a été donné par D. Hestenes*).

e/ Expression du ψ de D. Hestenes en fonction du φ_+ de Dirac.

Nous déduisons de φ_+ en multipliant par i :

$$i \varphi_+ i = i \Phi_+ i - i \chi_- i \gamma_0 \quad \text{et donc :}$$

$$i \varphi_+ i = -\Phi_+ + \chi_- \gamma_0.$$

$$\text{D'où : } \psi = \frac{1}{2} (\varphi_+ - i \varphi_+ i) + \frac{1}{2} (\varphi_+ + i \varphi_+ i) \gamma_0.$$

$$\text{Comme } \varphi_+ + i \varphi_+ i = 2 \varphi_{I+} = \varphi_I (1 + \sigma_3),$$

φ_I étant la partie impaire de φ , et comme

$$\varphi_+ - i \varphi_+ i = 2 \varphi_{P+} = 2 \varphi_P (1 + \sigma_3),$$

φ_P étant la partie paire de φ , on peut écrire :

$$\psi = \varphi_{P+} + \varphi_{I-} \gamma_0.$$

*) D. Hestenes, J. Math. Phys., 8, 1967, p. 798.

VI. - Théorie de D. Hestenes

D. Hestenes utilise la forme générale d'un p - nombre en ne conservant dans (27) que le signe + , la solution avec le signe - conduisant aux mêmes résultats physiques, mais, de plus , la variation de β est réduite au segment $[0, \pi]$.

Ainsi toute solution de l'équation (50) doit être de la forme : $\psi = \rho^{\frac{1}{2}} \exp i \beta / 2 R$ (52).

La rotation R de Lorentz déduit la base propre des $\{e_\mu\}$ de la base fixe des $\{\gamma_\mu\}$ par la transformation :

$$e_\mu = R \gamma_\mu \tilde{R} \quad (\mu = 1, 2, 3, 0) \quad (53).$$

Le scalaire positif ρ est interprété comme la densité propre de probabilité de présence et l'angle $\beta(x)$ comme indiquant les proportions en chaque instant-point x du mélange particule-antiparticule, $\beta = 0$ correspondant à la particule chargée ou non (négaton par exemple) et $\beta = \pi$ à l'antiparticule (positon par exemple).

Ceci étant, la partie scalaire de $\psi \tilde{\psi}$, notée $(\psi \tilde{\psi})_S = \rho \cos \beta$ est la densité propre de particule du champ spinoriel et les vecteurs J_0 et J_3 définis par

$$J_\mu = \psi \gamma_\mu \tilde{\psi} = \rho e_\mu \quad (54)$$

sont respectivement les vecteurs densité de courant et densité de spin. Ils sont orthogonaux et e_0 est la vitesse instantanée d'univers dans le système propre. Quant aux vecteurs J_1 et J_2 ils ne reçoivent pas d'interprétation physique indépendante, mais D. Hestenes fait remarquer que le bivecteur $e_1 \wedge e_2$ qui décrit leur plan est déterminé par le spin et le vecteur courant en vertu de la relation :

$$e_1 \wedge e_2 = i e_0 \wedge e_3 \quad (55)$$

D. Hestenes calcule aussi la divergence des vecteurs $J_\mu^{(*)}$:

$$\square \cdot J_\mu = -2m \sin \beta \cdot e_3 \cdot J_\mu + 2ei(e_3 \wedge e_0 \wedge J_\mu \wedge A).$$

*) Lettre du 10 mai 1968.

Les solutions monochromatiques planes sont toujours importantes. D. Hestenes les écrit en l'absence de champ et lorsque l'énergie est positive sous la forme :

$$\psi^+ = u \exp i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x \quad (56)$$

où u est une rotation constante de Lorentz. Le vecteur p est défini par

$$p = m u \gamma_0 \tilde{u} = m e_0 \quad (57) .$$

En effet : $\square \psi^+ = \gamma^\mu \partial_\mu (u \exp i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x) = \gamma^\mu u i \tilde{\sigma}_3 p_\mu \exp i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x$
car $p = p_\mu \gamma^\mu$ et $p \cdot x = p_\mu \cdot x^\mu$.

$$\text{Donc : } \square \psi^+ = p u \gamma_2 \gamma_1 \exp i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x$$

Or l'équation de Dirac en l'absence de champ s'écrit :

$$\square \psi = m \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1 \quad (58) .$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} \square \psi^+ &= p u \gamma_2 \gamma_1 \exp i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x = m u \exp i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1 \\ &= m u \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1 \exp i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x , \text{ soit :} \\ p u &= m u \gamma_0 , \text{ d'où (57) puisque } u \tilde{u} = 1 . \end{aligned}$$

Il est intéressant d'introduire également les solutions monochromatiques à énergie négative :

$$\psi^- = v \exp -i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x \quad (59)$$

qui sont bien telles que, p étant toujours donné par (57), l'énergie $- p \cdot \gamma_0 = - p_0$ soit négative, puisque p_0 est positif.

$$\begin{aligned} \text{Or, } \square \psi^- &= p v \gamma_2 \gamma_1 \exp -i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x = m v \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1 \exp -i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x , \\ \text{soit : } p v &= - m v \gamma_0 , \text{ et si l'on pose } v = u i , \end{aligned}$$

on déduit de $v \tilde{v} = u i \tilde{u} = - u \tilde{u} = -1$, puisque $\tilde{i} = i$, la définition (57) de p de telle sorte que les solutions à énergie négative s'écrivent :

$$\psi^- = u i \exp -i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x \quad (60) .$$

Il en résulte que $v = u i = \exp i \pi / 2$ correspond à $\beta = \pi$ et, comme les solutions à énergie négative s'interprètent, conformément à la théorie des trous, dans le système propre à $t = 0$, leur intégration dans des volumes positifs introduit l'antiparticule, ce qui justifie la convention de D. Hestenes.

VII Interprétation de l'équation de Dirac-Hestenes

A) - Invariance de jauge

Si l'on effectue sur A une transformation de jauge en remplaçant A par :

$$A' = A + \square X ,$$

où X est une fonction scalaire de l'instant-point x, l'équation (50) reste inchangée si l'on remplace ψ par

$$\psi' = \psi \exp i \sigma_3 e X \quad (61) ,$$

comme on le vérifie aisément puisque

$$\square \psi' = (\square \psi) \exp i \sigma_3 e X + e \square X i \sigma_3 \exp -i \sigma_3 e X .$$

Les grandeurs de champ devant être des d-nombres, elles seront données par la formule générale

$$\psi \propto \tilde{\psi} \text{ où } \alpha \text{ est un d-nombre,} \quad (62).$$

Il est naturel d'imposer à ces d-nombres la condition d'être invariants dans une transformation de jauge ; il en résulte d'après (61) que cette condition sera réalisée si, et seulement si,

$$\psi \propto \tilde{\psi}' = \psi \exp i \sigma_3 e X \alpha \exp -i \sigma_3 e X = \psi \alpha \tilde{\psi} \quad (63),$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $i \sigma_3$ commute avec α .

Or une base de d-nombres est donnée par les seize d-nombres suivants : $1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_0 \gamma_1, \gamma_0 \gamma_2, \gamma_0 \gamma_3, \gamma_1 \gamma_2, \gamma_1 \gamma_3, \gamma_2 \gamma_3, \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2, \gamma_0 \gamma_1 \gamma_3, \gamma_0 \gamma_2 \gamma_3, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, i$,

qui forment évidemment un système libre.

On voit aisément que seuls les d-nombres suivants répondent à la question posée :

$$1, \gamma_0, \gamma_3, \gamma_0 \gamma_3, \gamma_1 \gamma_2, \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2, i, \quad (64).$$

De plus, comme tout résultat de mesure est un nombre réel, un d-nombre et son dual correspondent à la même réalité physique. Or γ_3 est le dual de $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2$ et $\gamma_1 \gamma_2$ celui de $\gamma_0 \gamma_3$.

De même $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont deux mais nous les conserverons tous les deux car nous n'interpréterons que leurs parties scalaires qui sont réelles. En définitive, nous conserverons les seuls cinq d-nombres :

$$1, \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2, \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2, \mathbf{i} \quad (65).$$

On peut remarquer que dans le cas de l'onde plane monochromatique les expressions des grandeurs de champ se réduisent à $p u \tilde{u}$ et ne dépendent donc pas du facteur exponentiel $\exp i \phi_3 p.x$.

On peut dire que l'aspect corpusculaire observable ($p.x = 0$) coïncide constamment dans le cas pur de l'onde plane avec l'aspect ondulatoire du point de vue des grandeurs de champs.

b) Définition des grandeurs de champ.

Nous complétons la théorie de D. Hestenes en introduisant en particulier les champs. *)

Nous interprétons donc dans le système propre et sous invariance de jauge les cinq d-nombres :

$$\begin{aligned} &1, \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2, \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2, \mathbf{i} \\ &\text{en définissant les grandeurs physiques suivantes :} \\ &\Omega = (2 \tilde{\psi})_S, \quad J_0 = 2 \gamma_0 \tilde{\psi}, \quad F = 2 \gamma_1 \gamma_2 \tilde{\psi} \\ &\text{si} = 2 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \tilde{\psi}, \quad \Omega = (2 i \tilde{\psi})_S \end{aligned} \quad (66)$$

Comme $\mathbf{i}$ anticommute avec un vecteur quelconque, on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega &= \rho \cos \beta, \quad J_0 = \rho e_0, \quad F = \rho \exp i \beta e_1 e_2, \\ \text{si} &= \rho e_0 e_1 e_2, \quad \Omega = -\rho \sin \beta \end{aligned} \quad (67).$$

Le vecteur J_0 est toujours le vecteur densité-flux dont la composante temporelle $J_0 \cdot e_0 = \rho$, densité de probabilité de présence pour un corpuscule qui est soit la particule, soit l'antiparticule.

*) Comptes rendus, 267, série B, 1968, p.1551.

Le dual de $e_0 e_1 e_2$ étant e_3 comme il résulte de la relation

$$e_0 e_1 e_2 = e_3 i, \text{ on obtient :}$$

si $= \rho e_3 i$, c'est-à-dire $s = \rho e_3$ qui montre que s est la densité de spin. Enfin, F s'écrit manifestement en utilisant (55) :

$$F = \bar{\Omega} e_0 e_3 + i \Omega e_0 e_3 \quad (68)$$

et l'on peut définir ainsi deux vecteurs d'espace $\vec{e}$ et $\vec{h}$, densités de moment électrique et de moment magnétique par :

$$\vec{e} = -\bar{\Omega} e_3 e_0 = -\bar{\Omega} \epsilon_3, \quad \vec{h} = -\Omega e_3 e_0 = -\Omega \epsilon_3 \quad (69).$$

Ces résultats sont bien ceux qui ont été obtenus dans notre interprétation générale de la théorie à l'aide du principe d'invariance (2ème Partie, formules 42).

La vérification des relations de PAULI-KOPIK se fait sans difficultés en algèbre réelle d'espace-temps.

En effet :

$$J_0^2 = -s^2 = \rho^2 = \Omega^2 + \bar{\Omega}^2, \quad J_0 \cdot e_3 = 0 \quad \text{et} \quad F \cdot J_0 = \rho \bar{\Omega} e_0 e_3 \cdot e_0 + i \rho \Omega e_0 e_3 \cdot e_0$$

$$\text{Or, } e_0 e_3 \cdot e_0 = -e_0 \cdot e_0 e_3 = -(e_0 \cdot e_0) e_3 + (e_0 \cdot e_3) e_0 = -e_3,$$

$$\text{et } i e_0 e_3 \cdot e_0 = e_1 e_2 \cdot e_0 = -(e_0 \cdot e_1) e_2 + (e_0 \cdot e_2) e_1 = 0.$$

$$\text{D'où : } F \cdot J_0 = -\bar{\Omega} s \quad \text{et} \quad (\text{dual} F) \cdot J_0 = (-\rho \exp i \beta e_0 e_3) \cdot \rho e_0 \text{ car}$$

$$i e_1 e_2 = -e_0 e_3, \text{ d'où } i F \cdot J_0 = -\rho \Omega e_0 e_3 \cdot e_0 + \rho \bar{\Omega} i e_0 e_3 \cdot e_0 =$$

$$\rho \Omega e_3 = \Omega s.$$

Ces relations permettent d'identifier dans le système propre les d-nombres Ω , J_0 , F , s , $\bar{\Omega}$ avec les tenseurs correspondants de la théorie de Dirac. L'angle de Takabayasi, déjà défini, n'est donc autre dans le système propre que l'angle β de D. Hestenes et il reçoit ainsi une signification physique précise puisque $\rho \cos \beta$ est la densité propre de particule. Ainsi l'interprétation générale qui a été donnée de la théorie de Dirac est en complet accord avec la théorie de D. Hestenes.

Remarquons que $\vec{e} \cdot \vec{h} = \Omega \bar{\Omega}$ et que $\vec{e}$ n'est nul que pour $\sin \beta = 0$, c'est-à-dire seulement dans un cas pur ; il en est ainsi dans le système propre d'une onde plane monochromatique qui est toujours un cas pur, mais ce n'est pas le cas général qui est celui d'un mélange de particules et d'anti-particules en théorie de Dirac comme en théorie de D.Hestenes.

c) -- Invariance relativiste de l'équation de Dirac-Hestenes.

L'observateur O écrit l'équation fondamentale sous la forme (50) :

$$\square \psi = (m \psi \gamma_0 + eA \psi) i \sigma_3 ,$$

et $\bar{O}$ retourne tous les axes γ^μ , m étant remplacé par $m' = -m$ tandis que e et A ne changent pas, d'où :

$$\square' \psi' = (-m' \psi' \gamma_0 + eA \psi') i \sigma_3 \quad (70).$$

Or $\square' = \gamma'^\mu \partial'_\mu = \gamma^\mu \partial_\mu = \square$ puisque $x'^\mu = -x^\mu$ et (70) s'écrit : $\square \psi' = (-m' \psi' \gamma_0 + eA \psi') i \sigma_3$.

On voit que $\psi' = \psi (-m)$ i est solution de cette dernière équation, $\psi (-m)$ indiquant que l'on change m en m' dans $\psi (m)$, et i anticommute avec γ_0 . Si $\vec{A} = 0$, $\psi = \rho^{1/2} u \exp. i \sigma_3 p \cdot x$ est solution et $p \cdot x$ reste invariant lorsque m est remplacé par $m' = -m$. On peut donc écrire $\psi' = \psi i$ et, pour multiplier ψ par i on peut changer ρ en $-\rho$ ou β en $\beta + \pi$. Comme O et $\bar{O}$ font les mêmes conventions, $\bar{O}$ doit conserver β en le faisant varier de 0 à π comme O , et donc changer ρ en $-\rho$ conformément d'ailleurs à sa nature tensorielle. Ainsi ρ n'apparaît plus comme le module d'un nombre complexe d'argument β mais comme un rayon vecteur orienté et comme un angle polaire, ce qui justifie la restriction de D.Hestenes pour la variation de β .

Utilisant les définitions (67) pour les grandeurs de champ, on obtient : $\Omega' = (\psi' \tilde{\psi}')_S = (\psi i i \tilde{\psi})_S = -\Omega = -\rho \cos \beta$,

$$J'_0 = \psi' \gamma_0 \tilde{\psi}' = \psi i \gamma_0 i \tilde{\psi} = J_0 = \rho e_0 = (-\rho) (-e_0),$$

avec changement du signe de la vitesse d'univers,

$F' = ehc/4\pi m \psi' \gamma_1 \gamma_2 \tilde{\psi}' = - ehc/4\pi m \psi i \gamma_1 \gamma_2 i \tilde{\psi} = F$, d'où $\vec{e}' = -\vec{e}$, $\vec{h}' = -\vec{h}$, $s' = \psi \gamma_3 \tilde{\psi} = \psi i \gamma_3 i \tilde{\psi} = s$ et $\vec{n}' = \psi' i \tilde{\psi}' = \psi i i i \tilde{\psi} = -\vec{n} = \rho \sin \beta$, toutes transformations en accord avec la théorie de Dirac.

De la même façon nous considérons les solutions négatives de (50) pour l'observateur O qui s'écrivent, comme on l'a vu, $\rho^{1/2} i \exp - i \vec{\sigma}_3 p.x$ pour l'état $E' (-W, -\vec{p})$.

Superposons E et E' en introduisant, comme en théorie de Dirac, l'angle β , on obtient :

$\psi = \rho^{1/2} \cos \beta/2 u \exp i \vec{\sigma}_3 p.x + \rho^{1/2} i \sin \beta/2 u \exp - i \vec{\sigma}_3 p.x$ qui, à $t = 0$ et dans le système propre, conduit à

$$\psi_0 = \rho^{1/2} \exp i \beta/2 u.$$

Cette expression de ψ_0 n'est autre que la solution générale de (50) écrite par D. Hostenes, avec une rotation constante u de Lorentz, de telle sorte que les relations de Pauli-Kofink sont valables et en particulier (69).

Ainsi l'algèbre réelle d'espace-temps retrouve très rapidement tous les résultats de la théorie généralisée de Dirac et conduit, de ce fait, aux mêmes conclusions que celle-ci en ce qui concerne le retournement de tous les axes d'espace-temps.

d) Principe de superposition*)

Soient ψ_k ($k = 1, \dots, n$) n solutions de l'équation fondamentale (50). Leur somme ψ est encore une solution puisque (50) est linéaire et, comme les ψ_k sont des d-nombres pairs, il en est de même de ψ .

De plus, $\psi \tilde{\psi}$ est un nombre complexe de telle sorte que l'on peut écrire ψ sous la forme canonique (27) et poser :

$$\psi = \rho^{1/2} \exp i \beta R = \sum_k \psi_k \quad :$$

La condition $R = \bar{R}$ est satisfaite et $R\bar{R} = 1$ exige :

$$\psi \tilde{\psi} = \rho \exp i \beta \quad (72), \text{ d'où l'on déduit } R = \psi / \sqrt{\psi \tilde{\psi}},$$

qui définit le système propre (ou local) où la vitesse est e_0 .

*) C.R. Acad.Sci. A, t.268, p.437.

c'est-à-dire que dans ce système la vitesse d'espace est nulle, mais il nous faut examiner la signification physique de cette transformation mathématique.

1°) Supposons tout d'abord que $k = 1, 2$. La condition (72) s'écrit :

$$\rho \exp i \beta = (\rho_1^{1/2} \exp i \beta_1 R_1 + \rho_2^{1/2} \exp i \beta_2 R_2) (\rho_1^{1/2} \exp i \beta_1 \tilde{R}_1 + \rho_2^{1/2} \exp i \beta_2 \tilde{R}_2) = \rho_1 \exp i \beta_1 + \rho_2 \exp i \beta_2 + (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \exp i (\beta_1 + \beta_2) (R_1 \tilde{R}_2 + R_2 \tilde{R}_1).$$

Or $R_1 \tilde{R}_2$ est une rotation de Lorentz et l'on peut poser $R_1 \tilde{R}_2 = \exp - B$, B étant un bivecteur. Mais un bivecteur quelconque, de carré non nul, peut s'écrire (73) $B = (\theta + i \varphi) b$ avec $b^2 = 1$ et θ, φ scalaires, b étant un bivecteur convenable. Donc en posant

$$\beta_1 + \beta_2 = 2 \delta, \text{ on obtient :}$$

$$R_1 \tilde{R}_2 + R_2 \tilde{R}_1 = \exp - B + \exp B = 2 \cosh \theta \cos \varphi + 2 i \sinh \theta \sin \varphi, \text{ et}$$

$$\rho \exp i \beta = \rho_1 \exp i \beta_1 + \rho_2 \exp i \beta_2 + 2 (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \exp i \delta (\cosh \theta \cos \varphi + i \sinh \theta \sin \varphi).$$

D'où les conditions qui déterminent ρ et β :

$$\rho \cos \beta = \rho_1 \cos \beta_1 + \rho_2 \cos \beta_2 + 2 (\rho_1 \rho_2)^{1/2} (\cos \delta \cosh \theta \cos \varphi - \sin \delta \sinh \theta \sin \varphi)$$

$$\rho \sin \beta = \rho_1 \sin \beta_1 + \rho_2 \sin \beta_2 + 2 (\rho_1 \rho_2)^{1/2} (\sin \delta \cosh \theta \cos \varphi + \cos \delta \sinh \theta \sin \varphi).$$

Si $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont relatives à des négations ($\beta_1 = \beta_2 = 0$), ces conditions sont : (74) $\rho \cos \beta = \rho_1 + \rho_2 + 2 (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \cosh \theta \cos \varphi$ et (75) $\rho \sin \beta = 2 (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \sinh \theta \sin \varphi$. Comme,

en général, θ et $\sin \varphi$ sont différents de zéro, la condition $\beta = 0$ de conservation de la charge ne peut être satisfaite, de telle sorte que l'ensemble initial de négations apparait comme un mélange de négations et de positons ce qui est physiquement paradoxal.

Mais, si $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont deux ondes planes monochromatiques, elles ne peuvent interférer que si elles ont la même énergie. Or par rapport à la base propre (R_1) définie en théorie de D. Hestenes par $e_i = R_i \gamma_1 \tilde{R}_i$ ($i = 1, 2, 3, 0$) l'énergie de $\mathcal{U}_1$ est $me_0^2 = m$ masse propre, tandis que celle de $\mathcal{U}_2$ dont la vitesse d'univers est $e'_0 = R_2 \gamma_0 \tilde{R}_2$, est $me_0 \cdot e'_0$. Les conditions $e_0^2 = e_0 \cdot e'_0 = 1$ exigent (76) $e_0 = e'_0$ car, de $e'_0 = a e_0 + a^j e_j$ ($j = 1, 2, 3$), on

déduit $a = 1$ et $e_0^2 = 1 + a^j a_j$, c'est-à-dire $a_j = 0$ pour tout j .

D'une façon générale nous dirons que les bases (R_1) et (R_2) sont équivalentes si la relation (76) qui est manifestement une relation d'équivalence sur l'ensemble des rotations de Lorentz est vérifiée, et nous écrirons $(R_1) \sim (R_2)$. De $R_2 = \exp B R_1$, on déduit (77), équivalente à (76) :

$$\exp B e_0 = e_0 \exp B \quad (77) .$$

Or $\exp B = \cosh \Theta \cos \varphi + \sinh \Theta \sin \varphi + b(\sinh \Theta \cos \varphi + i \cosh \Theta \sin \varphi)$. Décomposons b sur les e_i en posant $b = e' e_0 + i e'' e_0$, e' et e'' étant des vecteurs d'espace. La condition (77) s'écrit :

$$e_0 (\cosh \Theta \cos \varphi - \sinh \Theta \sin \varphi) + (e' + i e'') \sinh \Theta \cos \varphi + (i e' - e'') \sinh \Theta \sin \varphi = e_0 \cosh \Theta \cos \varphi + \sinh \Theta \sin \varphi + (i e'' - e') \sinh \Theta \cos \varphi + i e' \cosh \Theta \sin \varphi + e'' \cosh \Theta \sin \varphi , \text{ soit :}$$

$$i e_0 \sinh \Theta \sin \varphi + e' \sinh \Theta \cos \varphi - e'' \cosh \Theta \sin \varphi = 0 .$$

La solution banale $\Theta = 0$ et $\sin \varphi = 0$ étant exclue, il reste soit $\sin \varphi = 0$ et $e' = 0$, d'où $b = i e'' e_0$ qui implique b^2 négatif et est donc à rejeter, soit $\Theta = 0$ et $e'' = 0$, d'où $b = e' e_0$ compatible avec $b^2 = 1$, d'où $b = a^j a_j e_0$ avec $a^j a_j = -1$. Remarquons que $R_2 = \exp i \varphi e' e_0$ $R_1 = \exp i \varphi a^j e_j e_0$ R_1 s'écrit encore

$$R_2 = R_1 \exp i \varphi a^j \tilde{\gamma}_j ,$$

$$\text{car } e_j e_0 R_1 = R_1 \tilde{\gamma}_j \tilde{R}_1 R_1 \tilde{\gamma}_0 \tilde{R}_1 R_1 = R_1 \tilde{\gamma}_j \tilde{\gamma}_0 = R_1 \tilde{\gamma}_j .$$

Ainsi $(R_1) \sim (R_2)$ implique $\Theta = 0$ dans le bivecteur (73).

Ceci étant, nous ne considérons que des superpositions de solutions $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ pour lesquelles (R_1) et (R_2) sont des bases équivalentes pour tout x . Les négatons associés à ces solutions ont chacun, à tout instant t , même énergie car les conditions de normalisation sur $\mathcal{P}_1$ et sur $\mathcal{P}_2$ impliquent $\int_{\Omega} \mathcal{P}_1 e_0^2 du = m \int_{\Omega} \mathcal{P}_1 du = m$ pour $\mathcal{U}_1$ du étant l'élément du volume Ω et, pour $\mathcal{U}_2$, $m = m \int_{\Omega} \mathcal{P}_2 du = m$ puisque $e_0 \cdot e'_0 = 1$ en tout point. Dès lors, le paradoxe relatif à la superposition d'ondes associées à des négatons disparaît car $\Theta = 0$ est compatible avec $\beta = 0$ et (75) est ainsi vérifiée tandis que (74) s'écrit :

$$(78) \quad \rho = \rho_1 + \rho_2 + 2 (\rho_1 \rho_2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi .$$

Remarquons encore que, toujours dans ce cas, R_i donné par (72), appar-

tient à la classe d'équivalence de R_1 . En effet,

(79) $R = [(\rho_1/\rho)^{\frac{1}{2}} + (\rho_2/\rho)^{\frac{1}{2}} \exp i \varphi] b$ $R_1 = AR_1 = AR_1$ puisque $\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0$, et de $R\tilde{R} = 1$ on déduit $A\tilde{A} = 1$. Il existe donc un bivecteur B_2 tel que $A = \exp B_2$, mais A commute avec e_0 et donc R est de la forme R_2 , d'où $A = \exp i \varphi e_1 e_0$ et, en égalant les parties bivectorielles de cette relation où A est donné par (79), on voit que $e_1 e_0 = b$.

Dans le cas particulier où les ondes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont données par $\mathcal{U}_1 = \rho_1^{\frac{1}{2}} u \exp i \zeta_3 p.x$ et $\mathcal{U}_2 = \rho_2^{\frac{1}{2}} u \exp i \zeta_3 (p.x + \varphi)$ la relation d'équivalence s'écrit $R_2 = R_1 \exp i \zeta_3 \varphi$ et (78) n'est autre que la formule de la diffraction où φ est la différence de phase.

Plus généralement, superposons des solutions $\mathcal{U}_k = \rho_k^{\frac{1}{2}} R_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) toutes relatives à des négatons et dont les R_k sont définis par

$$(80) \quad R_k = \exp i \varphi_k \sigma R_0,$$

où R_0 est une rotation de Lorentz, où $\sigma = e' e_0$ avec $e_0 = R_0 \gamma_0 \tilde{R}_0$ et où e' est un vecteur d'espace fixe de carré -1 , où φ_k est un scalaire de telle sorte que (80) est une relation d'équivalence plus restrictive que (76) sur l'ensemble des rotations de Lorentz. On déduit de (80)

$$R_k \tilde{R}_l = \exp i \varphi_k \sigma \exp -i \varphi_l \sigma, \text{ avec } k \neq l = 1, 2, \dots, n$$

et donc

$$R_k \tilde{R}_l = \exp i (\varphi_k - \varphi_l) \sigma.$$

Posons $\rho^{\frac{1}{2}} R = \rho_1^{\frac{1}{2}} R_1 + \dots + \rho_n^{\frac{1}{2}} R_n$. On obtient :

$$\rho = (\rho_1^{\frac{1}{2}} R_1 + \dots + \rho_n^{\frac{1}{2}} R_n) (\rho_1^{\frac{1}{2}} \tilde{R}_1 + \dots + \rho_n^{\frac{1}{2}} \tilde{R}_n),$$

soit $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_n + \sum 2 (\rho_l \rho_m)^{\frac{1}{2}} \cos (\varphi_m - \varphi_l)$ la somme étant étendue aux $n(n-1)/2$ couples (l, m) , et $\rho \gg 0$ car la superposition de $\mathcal{U}_1$ et de $\mathcal{U}_2$ introduit une onde $\rho_{12}^{\frac{1}{2}} R_{12}$ où $\rho_{12} \gg 0$ tandis que d'après le résultat du paragraphe précédent R_{12} est équivalent à R_0 selon (80) et la démonstration est faite par itération.

Soit enfin une superposition d'ondes $\mathcal{U}(q_p)$ ($p = 1, 2, \dots, m$) dépendant continûment de m paramètres q_p dans un domaine (D) de l'espace des q_p ,

$$\text{et : } I = \int_D \rho^{\frac{1}{2}}(q_p) \cos \varphi(q_p) dq, \quad J = \int_D \rho^{\frac{1}{2}}(q_p) \sin \varphi(q_p) dq,$$

avec $dq = dq_1 \dots dq_m$.

$$\text{Posons } \rho^{\frac{1}{2}} R = \int_D \rho^{\frac{1}{2}}(q_p) \exp i \varphi(q_p) \sigma R_0 dq,$$

c'est-à-dire $\rho^{\frac{1}{2}} R = IR_0 + iJ \sigma R_0$.

$$\text{Donc } \rho' = (IR_0 + i \sigma JR_0) (\tilde{I}R_0 - i \sigma JR_0) = I^2 + J^2,$$

et le caractère positif de ρ' est mis en évidence.

VIII. Sur certains champs magnétiques.*)

Nous cherchons des solutions de l'équation fondamentale (50) relative au négaton et de la forme :

$$(81) \quad \psi = \rho^{1/2}(x) u \exp i \tilde{\sigma}_3 p \cdot x = \rho^{1/2}(x) R$$

où u est une rotation constante et où p est défini par $p = \mu \delta_0 \tilde{u}$.

On sait que, lorsque p , est constant, ψ est solution de l'équation fondamentale (50) où $A = 0$.

Nous considérons la base fixe $\{\xi_i\}$ définie à partir des γ_i par :

$$\xi_i = u \gamma_i \tilde{u} \quad (i = 1, 2, 3, 0).$$

Cette base fixe est également propre puisque $e_0 = \xi_0$ et nous avons vu que d'une façon générale toutes les grandeurs physiques peuvent être définies indifféremment par u dans la base des ξ_i ou par R dans la base propre de D. Hestenes des vecteurs e_i .

Nous posons dans cette base fixe :

$$x = x^i \xi_i, \quad \square = \xi_i \partial_i \text{ avec } \xi^0 = \xi_0 \text{ et } \xi^i = -\xi_j \text{ pour } j = 1, 2, 3, \quad \partial_i = \partial / \partial x^i \text{ et } A = A^i \xi_i, \quad \sigma = i \tilde{\sigma}_3 = \gamma_2 \gamma_1.$$

Substituons (81) dans (50) et tenons compte du fait que, pour constant, (81) vérifie l'équation (50) lorsque $A = 0$. On obtient :

$$\frac{1}{2} \rho^{-1/2} (\square \rho) u \exp \sigma p \cdot x = e A \rho^{1/2} u \exp \sigma p \cdot x,$$

c'est-à-dire : $(\square \rho) u = 2eA \rho u \gamma_2 \gamma_1$ et, en définitive,

$$(82) \quad \square \rho = 2eA \rho \xi_2 \xi_1.$$

Or $A \xi_2 \xi_1 = A^0 \xi_0 \xi_2 \xi_1 + A^1 \xi_1 \xi_2 \xi_1 + A^2 \xi_2 \xi_1 \xi_2 + A^3 \xi_3 \xi_2 \xi_1$ et, comme le premier membre de (82) est un vecteur, on obtient pour A les conditions nécessaires

$$A^0 = A^3 = 0,$$

*) Comptes rendus, 267, série B, 1968, p.661

Comptes rendus, 267, série A, 1968, p.674.

Il en résulte que (82) s'écrit :

$$(83) \quad \square \rho = 2e \rho (A^1 \varepsilon_2 - A^2 \varepsilon_1),$$

ce qui implique pour ρ les conditions $\partial_0 \rho = \partial_3 \rho = 0$, d'où $\rho = \rho(x^1, x^2)$ et pour A l'ensemble des conditions :

$$(84) \quad A^0 = A^3 = 0, \quad A^1 = A^1(x^1, x^2), \quad A^2 = A^2(x^1, x^2)$$

qui exigent dans la base des $\{\varepsilon_i\}$ un champ électrique nul et un champ magnétique permanent $H = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1$ dirigé et constant suivant toute parallèle au spin $\varepsilon_3 \varepsilon_0 = e_3 e_0$.

Soit, réciproquement, un tel champ magnétique :

$$(85) \quad \vec{H} = H(x^1, x^2) e_3 e_0,$$

L'équation (83) s'écrit :

$$\varepsilon^1 \partial_1 \rho + \varepsilon^2 \partial_2 \rho = 2e \rho (A^1 \varepsilon_2 - A^2 \varepsilon_1)$$

ce qui équivaut au système différentiel :

$$(86) \quad \partial_1 \rho = 2e \rho A^2, \quad \partial_2 \rho = -2e \rho A^1.$$

Posons $\alpha = \text{Log } \rho$ et tenons compte de (85) : on obtient l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$(87) \quad 2eH = \Delta \alpha,$$

où $\Delta \alpha$ désigne le laplacien de la fonction $\alpha(x^1, x^2)$.

I°/ Examinons tout d'abord les solutions de (87) en général.

Soit un cylindre droit (Γ) dont la base (D) dans le plan (P), $Ox^1 x^2$, est limitée par un contour (γ) connexe et admettant une tangente continue. On suppose que $R(x^1, x^2)$ est continue dans (D) et sur (γ) et qu'elle admet des dérivées premières continues dans (D).

Nous cherchons des solutions $\alpha(x)$ de (87) continues dans (D) ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres et prenant sur (γ) la valeur constante $\alpha_0 = \text{Log } \rho_0$, ρ_0 étant la densité de probabilité de présence des négatons dans la région de (P) où $H = 0$. Or (87) ne peut admettre deux solutions distinctes $\alpha_1(x)$ et

$\alpha_2(x)$ car $\alpha_1 - \alpha_2$ serait une fonction harmonique s'annulant sur (γ) et donc nulle.

En conséquence, si l'on pose $\alpha(x) = \alpha_1(x) + u(x)$, $\alpha_1(x)$ étant une solution de (87), on voit que $u(x)$ doit être une fonction harmonique à valeurs données sur (γ) car, si M est un point quelconque de (γ) , $u(M) = \alpha_0 - \alpha_1(M)$; dès lors il suffit de résoudre le problème de Dirichlet lorsque l'on connaît une solution particulière de l'équation (87).

Le cas particulier où H est constant dans (Γ) est important physiquement. On peut prendre alors $\alpha_1 = eHr^2/2$, r et θ étant les coordonnées polaires d'un point du plan (P) .

II°/ Considérons le cas particulier où (γ) est un cercle de centre O et de rayon R , c'est-à-dire le cas où (Γ) est un cylindre de révolution d'axe Ox^3 . On obtient $u(M) = \alpha_0 - eHR^2/2 = u(x)$ et, en conséquence :

$$(88) \quad \text{Log } \rho(x) = \alpha(x) = eH(r^2 - R^2)/2 + \text{Log } \rho_0,$$

soit :

$$(89) \quad \rho = \rho_0 \exp eH(r^2 - R^2)/2 \text{ pour } 0 \leq r \leq R \text{ et } \rho = \rho_0 \text{ pour } |r| \geq R.$$

III°/ Supposons maintenant que (γ) est une couronne circulaire de centre O limitée par les cercles (C) et (C') de rayons R et R' ($R' < R$) ; on écrit l'équation (87) en utilisant les coordonnées polaires :

$$2eH = \Delta \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2}.$$

Or, $\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = 0$ par symétrie et la solution générale de (87) s'écrit $\alpha = eHr^2/2 + K \text{Log} r + K_1$, avec K et K_1 constantes.

De plus, sur le cylindre de révolution (Γ) de base (C) $\alpha = \alpha_0$ et $r = R$, donc

$$(90) \quad \rho_0 = k \exp (eHR^2/2 + K \text{Log} R) \text{ avec } k = \exp K_1,$$

et, sur le cylindre de révolution (Γ') de base (C') , $\alpha = \alpha'_0$ (constant) et $r = R'$, donc

$$(91) \quad \rho'_0 = k \exp (eHR'^2/2 + K \text{Log} R'),$$

si ρ'_0 est la densité de probabilité de présence sur (C') .

Supposons que dans (91) on fasse tendre R' vers zéro ;

on doit obtenir à la limite la valeur $\rho_0 \exp eH/2(-R^2)$ obtenue en faisant $r = 0$ dans l'équation (89). Ceci n'est possible que si $K = 0$ puisque, pour $K \neq 0$, ρ_0 a une limite nulle ou infinie. En définitive :

$$k = \rho_0 \exp eH/2(-R^2)$$

et la solution cherchée s'écrit

$$(92) \quad \rho = \rho_0 \exp eH/2(r^2 - R^2) \quad \text{pour } R' \leq r \leq R ,$$

avec la condition

$$\rho_0 \exp eHR'^2/2 = \rho'_0 \exp eHR^2/2 .$$

Ainsi ρ_0 est différent de ρ'_0 , ce qui prouve que la densité de présence propre des négatons est différente à l'extérieur de (Γ) et à l'intérieur de (Γ) bien que le champ soit également nul dans ces deux régions, mais elles ne sont pas connexes étant séparées par une couronne cylindrique à l'intérieur de laquelle le champ est différent de zéro.

IV°/ Nous revenons à l'équation (87) et nous supposons désormais H constant entre deux plans $x^2 = y = -b, b$, nul de plus à l'extérieur. On peut choisir $A^2 = 0$ en profitant de l'indétermination des potentiels, et donc

$$\partial_1 \rho = 0 , A^1 = -Hy + K(x^1) , \partial_{x^1} \rho = 2e \rho Hy - 2e \rho K(x^1) ,$$

c'est-à-dire

$$\rho = \rho_0 \exp (eHy^2 - 2eK(x^1) + K_1(x^1)) ,$$

avec K et K_1 fonctions de x^1 .

Si ρ_0 est la valeur de ρ pour $|y| \gg b$, on doit prendre

$$K = 0 \quad \text{et} \quad K_1 = -eH b^2$$

et le champ agit sur la répartition des négatons dans le système fixe suivant la loi

$$(93) \quad \rho = \rho_0 \exp eH(y^2 - b^2) \quad \text{pour } |y| \gg b \quad \text{et} \quad \rho = \rho_0 \quad \text{pour } |y| \gg b .$$

Interprétation physique.

L'analogie entre les formules (89) et (93) est évidente, la distance y au plan de symétrie du champ jouant dans (93) le rôle que joue dans (89) la distance r à l'axe de symétrie du champ.

Soit l'onde plane monochromatique d'un flux de négatons se déplaçant parallèlement à $\vec{H}$. Le moment magnétique s'oriente dans le même sens que $\vec{H}$ ou en sens contraire (Stern et Gerlach). Dans le premier cas le spin, de sens contraire à $\vec{H}$, est de sens contraire à $\vec{H}$; donc H est négatif, et, comme e est négatif, il y a, d'après (93) "dispersion" des négatons à partir du plan de symétrie du champ. Dans le second cas, il y a "regroupement" autour de ce plan.

La formule (89) et donc aussi la formule (92) s'interprète d'une façon tout-à-fait analogue, la "dispersion" ou le "regroupement" s'effectuant à partir de l'axe de symétrie du champ.

Dans l'un comme dans l'autre cas on peut dire que l'on observe un effet du premier ordre en eHb^2 (ou en $eHR^2/2$). Si l'on ne peut pas séparer les deux faisceaux précédents et si ceux-ci sont d'intensité égale, on doit observer la superposition des deux effets précédents c'est-à-dire un effet de "regroupement" en $e^2H^2b^4$ (ou en $e^2H^2R^4/2$). Ces différents effets mesurent toujours le rapport $(\rho - \rho_0)/\rho_0$ dans le plan de symétrie ou sur l'axe de symétrie.

Effet de Spin.

On peut donner à ces résultats une forme un peu différente en introduisant le bivecteur $F = i\hbar = -i\rho\epsilon_3\epsilon_0 = \rho\epsilon_1\epsilon_2$. De $\square F = (\square\rho)\epsilon_1\epsilon_2 = 2e\rho(A^1\epsilon_2 - A^2\epsilon_1)\epsilon_1\epsilon_2$ obtenue en utilisant l'équation (83), on déduit $\epsilon_0\square F$ et, $\nabla \times$ désignant le rotationnel de l'espace des ϵ_i , on obtient en séparant les parties scalaires et vectorielles des deux membres :

$$-\nabla \times h = -2e\rho(A^1\epsilon_1\epsilon_0 + A^2\epsilon_2\epsilon_0),$$

C'est-à-dire en introduisant le spin $\vec{\sigma} = \rho\epsilon_3\epsilon_0$

la relation $\nabla \times \vec{\sigma} = -2e \rho A$

qui n'est autre que (83), comme on le voit aisément et qui exprime l'interaction entre le champ extérieur et le spin.

Conditions de normalisation.

Reprenons l'interprétation physique précédente dans le cas général où eH n'est pas nécessairement petit. Supposons que (γ) soit un cercle de centre O et de rayon R et donc que (Γ) soit un cylindre de révolution d'axe Ox^3 . Soit ψ' une onde plane monochromatique (81) de densité uniforme ρ' qui rencontre le cylindre (Γ) de base (D) dans le plan (P) à l'intérieur duquel le champ H est uniforme. Il se produit alors, comme on l'a vu, une répartition statistique des négatons dans des plans perpendiculaires à Ox^3 , dont la densité est ρ_0 sur (Γ) et à l'extérieur de (Γ) et ψ' devient l'onde ψ où ρ est donnée par la formule (89)

$$\rho = \rho_0 \exp eH(r^2 - R^2)$$

Pour obtenir la relation entre ρ_0 et ρ' il faut normaliser les deux ondes. Utilisons pour cela un volume cubique dont une arête de grande longueur L est parallèle à Ox^3 . La normalisation de ψ' avant sa rencontre avec (Γ) exige

$$1 = \rho' L^3, \text{ soit } L = \rho'^{-1/3}$$

La normalisation de ψ exige :

$$1 = (L^3 - \pi R^2 L) \rho_0 + L \int_0^R \rho_0 \exp eH(r^2 - R^2) 2\pi r dr,$$

soit

$$1 = (L^3 - \pi R^2 L) \rho_0 + \pi \rho_0 / eH \exp -eHR^2 (\exp eHR^2 - 1)L$$

ou, en éliminant L :

$$1 = (\rho'^{-1} - \pi R^2 \rho'^{-1/3}) \rho_0 + (\pi \rho_0 / eH - \pi \rho_0 / eH \exp -eHR^2)$$

$\rho'^{-1/3},$

ce qui s'écrit encore :

$$\rho'/\rho_0 = 1 - \pi R^2 (\rho'^{2/3} + 1/\eta \rho'^{2/3} - \rho'^{2/3}/\eta \exp(-eHR^2))$$

ce qui devient pour η^3 négligeable devant

$$\eta = -eHR^2$$

$$\rho'/\rho_0 = 1 + \pi R^2 \rho'^{2/3} (\eta/2)$$

Ceci étant, peut-on dire que $\mathcal{U}$ où ρ n'est pas constant est encore une onde plane monochromatique ? Il nous semble que c'est une question de définition. En effet, les points en phase sont toujours dans un plan défini par $p.x = \text{constante}$ et l'énergie de $\mathcal{U}$ est toujours égale à celle de $\mathcal{U}'$. C'est pourquoi nous estimons que l'effet précédent introduit une onde plane monochromatique à densité non uniforme, et il nous paraît évident que, dans ce cas, la notion de trajectoire ponctuelle, connue ou inconnue, est dépourvue de toute signification.

IX. Particules neutres de spin 1*)

Multiplions en théorie de Dirac-Hestenes les grandeurs de champ $g(d) = \Omega, \bar{\Omega}, J_0, F, J_3$ par des scalaires $c(d)$ et l'on forme ainsi les d-nombres $G(d) = c(d)g(d)$ pour $d = 1, i, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ et γ_3 . On prend, pour $d = 1, i, c(d) = e$ et $c(d) = 1$ si la charge est nulle, $c(\gamma_0) = m, c(\gamma_1, \gamma_2) = B = e\hbar/4\pi m_0 c = ehc/4\pi m, c(\gamma_3) = \hbar/4\pi$.

*) C.R. Acad.Sciences, A, t. 268, p.673.

Soit maintenant l'équation

$$(84) \quad 2 \square \psi = (m \psi \gamma_0 + eA \psi) \gamma_2 \gamma_1$$

qui n'est autre que l'équation de Dirac-Hestenes pour une masse $\frac{1}{2}m$ et une charge $\frac{1}{2}e$, qui s'écrit en l'absence de champ

$$(85) \quad 2 \square \psi = m \psi \gamma_0 \gamma_2 \gamma_1$$

Soient (86) les solutions monochromatiques de (85) définies par

$\psi = e^{\frac{1}{2}i u \exp i p \cdot x}$, $\phi = e^{\frac{1}{2}i u \exp -i \tilde{\gamma}_3 p \cdot x}$, d'où $2p = me_0 = k$ et ρ, u , constants. Ce sont les ondes de deux demi-particules P_1 et P_2 qui fusionnent pour former une particule P si, et seulement si
 1°/ leur densité commune de probabilité de présence est celle de P ,
 2°/ P a même vitesse et même direction de spin que P_1 et P_2 qui fusionnent si bien que, si $g'(d)$ sont les grandeurs de champ de P , $g'(\gamma_0) = J'_0 = J_0 = \rho e_0$ et $g'(\gamma_3) = J'_3 = J_3 = \rho e_3$.

Comme $\psi + \phi$ est solution de (2), elle ne peut être la fonction d'onde de P qui est de masse m et non $\frac{1}{2}m$. Posons $u = U \exp \frac{1}{2}i \varphi \sigma$, U définissant une rotation temporelle constante, φ un scalaire constant et σ un vecteur unitaire d'espace fixe. L'onde $\chi = X + \omega$ avec

(87) $\chi = e^{\frac{1}{2}i \varphi} U \exp i \varphi \sigma \exp i \tilde{\gamma}_3 k \cdot x$, $\omega = e^{\frac{1}{2}i \varphi} U \exp i \varphi \sigma \exp i \tilde{\gamma}_3 k \cdot x$ est solution de l'équation de Dirac-Hestenes pour une masse m et sera de ce fait considérée comme la fonction d'onde de P .

Les ensembles (ψ) et (ϕ) étant disjoints, on posera pour les grandeurs de champ de P

$$(88) \quad G'(d) = c'(d)g'(d) = c(d) \psi d \tilde{\psi} + c(d) \phi d \tilde{\phi},$$

la partie scalaire étant seule considérée au second membre si $d = 1, i$ et les $c(d)$ étant ceux de Dirac pour $\frac{1}{2}m$ et $\frac{1}{2}e$.

On obtient :

$$G'(\gamma_0) = c'(\gamma_0)J'_0 = c'(\gamma_0)\rho e_0 \cdot \frac{1}{2}m\rho e_0 + \frac{1}{2}m\rho e_0 = m\rho e_0, \text{ d'où } c'(\gamma_0) = m, \\ G'(\gamma_3) = c'(\gamma_3)J'_3 = c'(\gamma_3)\rho e_3 = h/4\pi\rho e_3 + h/4\pi\rho e_3 = \frac{1}{2}h/\pi\rho e_3,$$

d'où

$c'(\gamma_3) = \frac{1}{2}h/\pi$ c'est-à-dire que P est une masse m et de spin 1.

$$G'(1) = \frac{1}{2}e(4\tilde{\eta})_S + \frac{1}{2}e(\tilde{\Phi}\tilde{\Phi})_S = 0, \quad G'(i) = 0 \text{ et } G'(\gamma_1\gamma_2) = 0.$$

Les identités $G'(i) = 0$ et $G'(1) = 0$ ne permettent pas de conclure pour la charge, mais il résulte des chapitres précédents que 4 correspond à une charge $\frac{1}{2}e$ et $\tilde{\Phi}$ à une charge $-\frac{1}{2}e$, de telle sorte que la charge de P est nulle.

a/ Champs. On introduit les champs en interprétant séparément γ_1 et γ_2 , et l'on pose dans (88) $d = \gamma_1\gamma_0 = \sigma_1$, $\gamma_2\gamma_0 = \sigma_2$, $c(\sigma_1) = c(\sigma_2) = K$ constant, d'où

$$E = K\rho u (\exp i\sigma_3 k.x) - \exp -i\sigma_3 j.x) \sigma_1 \tilde{u} = -2K\rho \sin k.x \varepsilon_2 \varepsilon_0,$$

$$H = K\rho u (\exp i\sigma_3 k.x - \exp -i\sigma_3 k.x) \sigma_2 \tilde{u} = 2K\rho \sin k.x \varepsilon_1 \varepsilon_0, \text{ avec } \varepsilon_i = u \gamma_i \tilde{u} \text{ et}$$

$i = 1, 2, 3, 0$. Formons $f = E + iH = 2K\rho \sin k.x (\varepsilon_1 \varepsilon_0 + i \varepsilon_2 \varepsilon_0)$ et calculons

$$\square f = 2iK\rho \cos k.x (\varepsilon_1 \varepsilon_0 + i \varepsilon_2 \varepsilon_0), \text{ avec } x = x^i \varepsilon_i, \quad k = k_i \varepsilon_i.$$

$$\text{Or } k(\varepsilon_1 \varepsilon_0 + i \varepsilon_2 \varepsilon_0) = k_1 \varepsilon_0 - (k_3 + k_0) \varepsilon_1 + k_1 \varepsilon_3 + (k_0 + k_3)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - k_2 \varepsilon_2 \varepsilon_1 (\varepsilon_0 + \varepsilon_3).$$

Si l'on forme $\varepsilon_0 \square f$ on obtient les premiers membres des équations de Maxwell et des seconds membres non nuls en général.

b/ Photons. Les équations de Maxwell $\square f = 0$ seront vérifiées si, et seulement si $k_1 = k_2 = 0$, $k_0 + k_3 = 0$, c'est-à-dire $k^2 = 0$ avec $k \neq 0$. Mais $k^2 = m^2$ et $k^2 = 0$ impliquent $m = 0$ et il faut effectuer un passage à la limite. Or dans la base des ε_i , l'énergie (ν , fréquence) est $m_0 c^2 \varepsilon_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{2} mhc / \pi \varepsilon_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{2} hc / \pi k_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{2} hc / \pi k_0 = h\nu$, soit $k_0 = 2\pi\nu/c$ et donc $k.x = 2\pi\nu(t - x^3/c)$. Ce passage à la limite n'est pas directement possible sur l'équation d'onde du photon

$$(89) \quad \square Z = m \sum \gamma_0 \gamma_2 \gamma_4$$

car $\square Z = 0$ impliquerait $k = 0$, ce serait absurde et il résulte de la validité de l'équation $\square f = 0$ en théorie du photon de masse propre nulle que le principe de superposition doit s'appliquer aux champs comme aux fonctions d'onde X et ω du photon, et la superposition des ondes doit impliquer l'addition des vecteurs de champ.

Pour le vérifier, calculons tout d'abord $2K \mathcal{U} \tilde{\mathcal{U}}$ et $2K \Phi \tilde{\Phi}$

On obtient

$$2K \mathcal{U} \tilde{\mathcal{U}} = 2K \rho u (\tilde{\epsilon}_1 \cos k.x - \tilde{\epsilon}_2 \sin k.x) \tilde{u} = 2K \rho (\xi_2 \xi_1 \cos k.x - \xi_2 \xi_0 \sin k.x) =$$

$$E' + E$$

$$2K \Phi \tilde{\Phi} = 2K \rho u (\tilde{\epsilon}_1 \cos k.x - \tilde{\epsilon}_2 \sin k.x) \tilde{u} = 2K \rho (\xi_1 \xi_0 \cos k.x + \xi_2 \xi_0 \sin k.x) =$$

$$E' - E,$$

le champ E' étant obtenu à partir de E en remplaçant u par $u' = u \exp. - i \tilde{\epsilon}_3 \pi / 4$, ce qui induit sur E une rotation de $\frac{1}{2} \pi$ autour de $\tilde{\epsilon}$.

Donc $2K \mathcal{U} \tilde{\mathcal{U}}$ et $2K \Phi \tilde{\Phi}$ sont les deux vibrations circulairement polarisées et leurs superpositions permettront de retrouver tous les états de polarisation.

Déterminons K à partir de E et de H en écrivant que statistiquement en théorie de Maxwell l'énergie des champs dans un grand volume ν est la valeur moyenne $(2K \rho)^2 \frac{1}{2} \nu = 2K^2 \rho^2 \nu$, soit, pour un photon, $2K^2 \rho^2 \nu = h \nu$, mais la condition de normalisation pour ρ constant est $1 = \rho \nu$ et donc $h \nu = 2K^2 \rho$, d'où en définitive pour les polarisations circulaires

$$\sqrt{2h\nu} \rho^{-\frac{1}{2}} \mathcal{U} \tilde{\mathcal{U}}, \quad \sqrt{2h\nu} \rho^{-\frac{1}{2}} \Phi \tilde{\Phi}.$$

Soient deux ondes $\xi_1 = X_1 + \omega_1$ et $\xi_2 = X_2 + \omega_2$ correspondant à $\rho = \rho_1, \rho_2$ et $\varphi = \varphi_1, \varphi_2$ et les ondes $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et Φ_1, Φ_2 associées. On sait que la superposition de X_1 et de X_2 conduit à une probabilité ρ donnée par

$$(90) \quad \rho = \rho_1 + \rho_2 + 2(\rho_1 \rho_2)^{\frac{1}{2}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

La vibration circulaire C_1 associée à X_1 fait intervenir le vecteur $u \tilde{u}$ avec $a = \tilde{\epsilon}_1 \cos k.x - \tilde{\epsilon}_2 \sin k.x$, c'est-à-dire, à la rotation U près,

le vecteur $\exp \frac{1}{2} i \zeta \varphi_1$ a $\exp -\frac{1}{2} i \zeta \varphi_1$ déduit de a dans la rotation d'angle $-\varphi_1$ autour de ζ , et la vibration circulaire C_2 associée à X_2 , le vecteur déduit de a dans la rotation d'angle $-\varphi_2$ autour de ζ , de telle sorte que la superposition des champs associés suivant la loi

$$C_1 + C_2 = \sqrt{2h\nu} \rho^{-\frac{1}{2}} \chi_1 \zeta_1 \tilde{\chi}_1 + \sqrt{2h\nu} \rho^{-\frac{1}{2}} \chi_2 \zeta_1 \tilde{\chi}_2$$

introduit la somme de deux vecteurs faisant entre eux l'angle $\varphi_2 - \varphi_1$. Si $\zeta = \zeta_3$ d'où (90) qui n'est autre ici que la règle classique de Fresnel.

De la même façon les vibrations Γ_1 et Γ_2 associées à ω_1 et ω_2 et superposées séparément comme C_1 et C_2 se composeront suivant (90). Mais (90) est encore valable si Γ_1 et Γ_2 correspondent à des φ opposés à φ_1 et à φ_2 c'est-à-dire à des angles de rotation φ_1 et φ_2 autour de ζ , et cette circonstance permet de rendre compte des interférences des vibrations rectilignement polarisées.

Soient en effet les ondes obtenues en confondant ζ avec ζ_3 et en remplaçant φ_1 et φ_2 par leurs opposés dans ω_1 , ω_2 et ϕ_1 , ϕ_2 :

$$\chi_1 = \rho_1^{\frac{1}{2}} U \exp i \zeta_3 (k.x + \varphi_1) \quad \text{et} \quad \chi_1 = \rho_1^{\frac{1}{2}} U \exp i \zeta_3 (p.x + \frac{1}{2} \varphi_1)$$

$$\omega_1 = \rho_1^{\frac{1}{2}} U \exp -i \zeta_3 (k.x + \varphi_1) \quad \text{et} \quad \phi_1 = \rho_1^{\frac{1}{2}} U \exp -i \zeta_3 (p.x + \frac{1}{2} \varphi_1)$$

et de même pour χ_2 , χ_2 et ω_2 , ϕ_2 .

On obtient alors les champs E_1 et E_2 calculés avec (88) en changeant, dans E et H , $k.x$ en $k.x + \varphi_1$ ou bien $k.x$ en $k.x + \varphi_2$ et en posant

$$\xi'_1 = u \xi_1 \tilde{u}. \quad \text{D'où} \quad E_1 = -\sqrt{2h\nu} \rho_1^{\frac{1}{2}} \sin(k.x + \varphi_1) \xi'_1 \xi'_0, \quad E_2 = -\sqrt{2h\nu} \rho_2^{\frac{1}{2}} \sin(k.x + \varphi_2) \xi'_2 \xi'_0$$

dont l'addition est un champ $E = -\sqrt{2h\nu} \rho^{\frac{1}{2}} \sin(k.x + \varphi) \xi'_2 \xi'_0$, la valeur de ρ étant toujours donnée par (90).

Ainsi la vérification annoncée a été effectuée.

c/ Si $m \neq 0$, on superpose les ondes χ et les champs dans les mêmes conditions et l'on a en définitive obtenu une théorie de la particule neutre de spin .1 et en particulier du photon de masse propre nulle et non nulle.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *L'atome d'hydrogène en théorie de Dirac-Hestenes*. Note (*) de M. GASTON CASANOVA, présentée par M. André Lichnerowicz.

Il existe pour la fonction d'onde de D. Hestenes des solutions « planes » conduisant aux mêmes niveaux d'énergie que les solutions « sphériques » bien connues de la théorie de Dirac, et pour lesquelles l'angle β de Takabayasi-Hestenes est nul à 2π près, conformément à la convention de D. Hestenes pour les négatons.

Avec les notations habituelles, on cherche pour l'équation de Dirac-Hestenes

$$(1) \quad \square \psi = (m\psi\gamma_0 + U\gamma_0\psi) i\sigma_3,$$

où $U\gamma_0$ est le potentiel scalaire eA , des solutions

$$\psi = L \exp i\sigma_3 E x_0,$$

où E est un scalaire constant et L un d -nombre pair, fonction des seules coordonnées d'espace. De

$$(\square \psi) \exp -i\sigma_3 E x_0 = \square L + E\gamma_0 L i\sigma_3 = (mL\gamma_0 + U\gamma_0 L) i\sigma_3,$$

on déduit

$$(2) \quad \gamma_0 \square L = \nabla L = [m\gamma_0 L\gamma_0 + (U - E)L] i\sigma_3,$$

avec

$$\nabla = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Or $L = M + iN$ avec $M = a + i\sigma$, $N = a' + i\sigma'$, a et a' scalaires, σ et σ' vecteurs de Pauli. De (2) et de $\gamma_0 M\gamma_0 = M$, on déduit

$$\nabla(M + iN) = [m(M - iN) + (U - E)(M + iN)] i\sigma_3$$

et

$$\gamma_0 \nabla L \gamma_0 = -\nabla(\gamma_0 L \gamma_0) = -\nabla(M - iN) = [m(M + iN) + (U - E)(M - iN)] i\sigma_3,$$

d'où

$$(3) \quad \nabla M = (m + E - U) N \sigma_3;$$

$$(4) \quad \nabla N = (m - E + U) M \sigma_3.$$

Cette décomposition de (1) dans le cas d'un potentiel scalaire m'a été communiquée par MM. Roger Boudet et Paul Quilichini.

Posons maintenant :

$$(5) \quad M = G(r) r^{\frac{1}{2}} f,$$

(2)

avec

$$f\tilde{f}=1 \quad \text{et} \quad M\tilde{M}=a^2+\sigma^2=r G^2(r);$$

$$(6) \quad N=F(r) r^{\frac{1}{2}} \sigma_3 u f,$$

avec $N\tilde{N}=r F^2(r)$.

Or, dans $z=0$,

$$\nabla = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial y} = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

avec

$$u = \sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta, \quad \varphi = -\sigma_1 \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta.$$

Posons

$$(7) \quad f = \exp i \sigma_3 j \theta, \quad \text{avec} \quad j = l + \frac{1}{2}.$$

On définit ainsi, avec (5) et (6) des solutions planes qui seront uniformes pour j entier, mais cette condition est trop restrictive car le ψ de D. Hestenes est susceptible de deux déterminations opposées qui s'échangent dans une variation de 2π de l'angle β d'Hestenes-Takabayasi, variation qui laisse évidemment invariante les grandeurs de champ $\psi d\tilde{\psi}$, où d est un d -nombre.

Il suffit donc qu'une rotation de 2π autour de σ_3 change le signe de f , ce qui implique que l est un entier relatif, comme nous le supposons désormais. En substituant (5) et (6) dans (3) et (4), on obtient

$$(8) \quad \nabla (G r^{\frac{1}{2}} f) + (m + E - U) F r^{\frac{1}{2}} u f = 0;$$

$$(9) \quad \nabla (F r^{\frac{1}{2}} u f) + (m - E + U) G r^{\frac{1}{2}} f = 0.$$

Or

$$\nabla (G r^{\frac{1}{2}} f) = u \left(\frac{dG}{dr} r^{\frac{1}{2}} f + \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} G f \right) + r^{\frac{1}{2}} G \frac{\varphi}{r} i \sigma_3 j f \quad \text{et} \quad u r^{-\frac{1}{2}} (\nabla M) \tilde{f} = \frac{dG}{dr} - \frac{lG}{r},$$

d'où l'équation :

$$(10) \quad \frac{dG}{dr} - \frac{lG}{r} + (m + E - U) F = 0.$$

De même,

$$\nabla (F r^{\frac{1}{2}} u f) = u \left(\frac{dF}{dr} r^{\frac{1}{2}} u f + \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} F u f \right) + F r^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi}{r} (v f + u i \sigma_3 j f),$$

d'où

$$r^{-\frac{1}{2}} (\nabla F r^{\frac{1}{2}} u f) \tilde{f} = \frac{dF}{dr} + \frac{F}{2r} + \frac{F}{r} + \frac{jF}{r},$$

et donc l'équation

$$(11) \quad \frac{dF}{dr} + (l+2) \frac{F}{r} - (E - U - m) G = 0.$$

(3)

Ces équations (10) et (11) ne sont autres, aux notations près, que les équations connues de la théorie de Dirac ⁽¹⁾. Leur résolution introduit un troisième nombre quantique p et donne les niveaux d'énergie. Calculons $\rho \exp i\beta$, où ρ est la probabilité, ainsi que le spin,

$$\rho \exp i\beta = \psi \tilde{\psi} = r (G + iF\sigma_3 u) (G - iF\sigma_3 u) = r (G^2 - F^2),$$

d'où $\rho \sin \beta = 0$ et $\rho \neq 0$ qui impliquent $\beta = 0, \pi$.

Quant au spin, il est donné par $\psi \gamma_3 \tilde{\psi} \gamma_0 = r (G^2 - F^2) \sigma_3$. On résout (10) et (11) en développant F et G suivant les formes

$$F = (a_0 r^\gamma + \dots) \exp -kr, \quad G = (b_0 r^\gamma + \dots) \exp -kr,$$

$k, a_0, \dots, b_0, \dots$ étant des constantes, ce qui conduit à la relation $\alpha a_0 + (\gamma - 1) b_0 = 0$, où α est la constante très petite de structure fine et où $\gamma + 1 = [(l + 1)^2 - \alpha^2]^{1/2}$. D'où

$$\left| \frac{a_0}{b_0} \right| = \frac{l + 1 - [(l + 1)^2 - \alpha^2]^{1/2}}{\alpha}$$

et, si $l + 1$ est positif,

$$\left| \frac{a_0}{b_0} \right| \sim \frac{\alpha}{2} (l + 1)^{-1}$$

qui est inférieur à 1 pour $l = 0, 1, 2, \dots$. Pour r suffisamment petit, la condition $|a_0| < |b_0|$ implique $|F| < |G|$ et cette inégalité se conserve constamment puisque $\rho \neq 0$. La condition $\beta = 0$ est ainsi vérifiée pour les solutions (7) et leur spin est de même sens que σ_3 .

Mais, si l'on change les signes des charges électriques du noyau et de l'électron, on ne change pas l'équation (1) puisque U reste invariant et l'on doit donc obtenir pour ce nouveau système les mêmes états d'énergie. Or le changement de l en $-(l + 1)$ introduit un deuxième ensemble de solutions correspondant à $|G| < |F|$ et donc à $\beta = \pi$ (à 2π près) qui implique bien le changement du signe de la charge selon la convention de D. Hestenes et inclut également le changement de sens du spin.

(*) Séance du 27 avril 1970.

(1) L. DE BROGLIE, *L'électron magnétique*, chap. XVII, Paris, 1934.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Solutions planes de l'équation de Dirac-Hestenes dans un champ central.* Note (*) de M. GASTON CASANOVA, présentée par M. André Lichnerowicz.

L'étude des solutions planes de l'équation de Dirac-Hestenes fait apparaître de notables différences avec l'interprétation habituelle des solutions sphériques de l'équation de Dirac en ce qui concerne les rôles respectifs du moment orbital et du spin. On peut en outre prévoir l'existence à côté de l'atome d'hydrogène d'un atome d'antihydrogène, les solutions générales étant relatives à un mélange de ces deux atomes.

En présence d'un champ scalaire $eA = U\gamma_0$, les solutions

$$(1) \quad L = M + iN = r^{\frac{1}{2}} (G + i\sigma_3 u F) f, \quad \text{avec } u = \sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta$$

de l'équation de Dirac-Hestenes donnent, comme on l'a vu (1), les niveaux d'énergie. De plus,

$$(2) \quad \rho \cos \beta = r(G^2 - F^2), \quad \rho \sin \beta = 0$$

si ρ est la probabilité, et

$$(3) \quad L\gamma_3 \tilde{L}\gamma_0 = r(G^2 - F^2) \sigma_3 \quad \text{pour le spin.}$$

De $\rho \sin \beta = 0$ on déduit, puisque $\rho \neq 0$, $\sin \beta = 0$ et donc $\beta = 0, \pi$.

La condition $\beta = 0$ exige $F^2 < G^2$. Si l'on écrit les développements de F et de G sous les formes

$$F \exp kr = (a_0 + a_1 r + \dots + a_p r^p) r^\gamma \quad \text{et} \quad G \exp kr = (b_0 + b_1 r + \dots + b_p r^p) r^\gamma,$$

où $k, a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_p$ sont des constantes, on obtient

$$(4) \quad \frac{a_0}{b_0} = \frac{l - \gamma}{\alpha} \quad \text{et} \quad \gamma = -1 + \sqrt{(l+1)^2 - \alpha^2}$$

si α est la constante très petite de structure fine.

Dès lors, si $l+1$ est positif, $a_0/b_0 \sim \alpha/2(l+1)$ et le rapport F/G est positif et petit pour r tendant vers zéro. On peut poser

$$(5) \quad G = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ch} \frac{\varphi}{2}, \quad F = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \text{sh} \frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$(6) \quad L = \rho^{\frac{1}{2}} \left(\exp - \nu \frac{\varphi}{2} \right) f,$$

avec

$$\frac{F}{G} = \text{th} \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad \nu = -\sigma_1 \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta.$$

La vitesse d'univers e_0 est donnée par

$$(7) \quad e_0 = \left(\exp - \nu \frac{\varphi}{2} \right) \gamma_0 \exp \nu \frac{\varphi}{2} = \gamma_0 \text{ch} \varphi - \nu \gamma_0 \text{sh} \varphi,$$

(2)

d'où l'énergie cinétique $m(\text{ch}\varphi - 1)$ et la vitesse d'espace réduite $\varpi = -\nu \text{th}\varphi$. Quant au spin, il est d'après (3) dirigé suivant σ_3 . On peut en outre appeler $ru \times \varpi = riu\nu \text{th}\varphi = -r\sigma_3 \text{th}\varphi$ le moment orbital; il est de sens contraire au spin puisque φ est ici positif.

Ces solutions définies par (5) et (6) avec les conditions $l + 1$ positif et $j = l + (1/2)$ forment un premier ensemble (T_1), les fonctions F et G vérifiant le système

$$(8) \quad \frac{dG}{dr} - \frac{lG}{r} + (m + E - U) F = 0;$$

$$(9) \quad \frac{dF}{dr} + \frac{(l+2)F}{r} - (E - U - m) G = 0.$$

On sait aussi que, pour le quantum n , on pose $n = p + l + 1$.

Il existe un second ensemble de solutions, toujours avec $\beta = 0$. En effet, posons maintenant $j = l - (1/2)$. Les seconds termes $-lG/r$ et $(l+2)F/r$ de (8) et (9) se transforment en $(1-l)G/r$ et $(l+1)F/r$.

Posons $l' = l - 1$ et donc $l' + 2 = l + 1$. On obtient à nouveau (8) et (9) avec l' au lieu de l , d'où

$$\gamma = -1 + \sqrt{(l'+1)^2 - \alpha^2}$$

et, si $l' + 1$ est positif,

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{l' - \gamma}{\alpha} \sim \frac{\alpha}{2(l'+1)},$$

d'où, toujours, $F^2 < G^2$.

Comme $l' + 1 = l = j + (1/2)$, la condition l positif exclut le cas $l = 0$, ce qui est satisfaisant, et redonne les niveaux d'énergie. On pose ici

$$n = p + l' + 1 = p + l.$$

Il existe aussi des solutions $\beta = \pi$. Il suffit de poser

$$(10) \quad \rho = \frac{r}{2} (F^2 - G^2), \quad F = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ch} \frac{\varphi}{2}, \quad G = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \text{sh} \frac{\varphi}{2},$$

ce qui exige $G^2 < F^2$. Il résulte de (10) :

$$\frac{G}{F} = \text{th} \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad L = \rho^{\frac{1}{2}} \left(\text{sh} \frac{\varphi}{2} - \nu \text{ch} \frac{\varphi}{2} \right) f$$

que l'on écrira

$$(11) \quad L = \rho^{\frac{1}{2}} i \exp i\nu \frac{\pi}{2} \left(\exp - \nu \frac{\varphi}{2} \right) f.$$

Calculons la vitesse d'univers e_0 :

$$e_0 = i \exp i\nu \frac{\pi}{2} \left(\exp - \nu \frac{\varphi}{2} \right) \gamma_0 \exp \nu \frac{\varphi}{2} \left(\exp - i\nu \frac{\pi}{2} \right) i,$$

soit

$$e_0 = \exp i\nu \frac{\pi}{2} (\exp - \nu \varphi) \gamma_0 \exp - i\nu \frac{\pi}{2} = \gamma_0 \text{ch} \varphi - \nu \gamma_0 \text{sh} \varphi$$

et la vitesse d'espace réduite est $\varpi = -\nu \text{th}\varphi$.

(3)

Quant au spin

$$L\gamma_3\tilde{L}\gamma_0 = \rho i \left(\exp i\nu \frac{\pi}{2} \right) \gamma_3 \left(\exp -i\nu \frac{\pi}{2} \right) i\gamma_0 = -\rho\sigma_3,$$

il est ici de sens contraire à σ_3 .

Enfin, si l'on pose $j = l + (1/2)$, les fonctions F et G vérifient (8) et (9) et donc

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{l - \gamma}{\alpha} = \frac{l + 1}{\alpha} \sqrt{(l + 1)^2 - \alpha^2},$$

mais, si l'on suppose $l + 1$ négatif, $a_0/b_0 \sim 2(l + 1)/\alpha$ est grand et négatif. La condition $G^2 < F^2$ est bien satisfaite. De plus, φ étant ici négatif, la vitesse a changé de sens et donc aussi le moment orbital $-r\hbar\varphi\sigma_3$ mais il est toujours de sens contraire au spin.

Nous appellerons (T_3) cet ensemble de solutions où $n = p - l - 1$. Il existe encore un ensemble (T_4) de solutions $\beta = \pi$, $n = p - l$ obtenu en posant $j = l - (1/2)$ car les fonctions F et G vérifient alors (8) et (9) où l est remplacé par $l' = l - 1$. Si donc $l' + 1$ est négatif, $a_0/b_0 \sim 2(l' + 1)/\alpha$ est grand et négatif. La condition $l' + 1$ négatif équivaut à l négatif. Ces solutions $\beta = \pi$ doivent être théoriquement interprétées conformément à la convention de D. Hestenes comme correspondant au mouvement d'un positon dans le champ d'un proton négatif et leurs niveaux d'énergie sont ceux d'un atome d'antihydrogène, sans doute très instable.

Cette théorie diffère de l'interprétation habituelle de la mécanique ondulatoire particulièrement sur les points suivants :

1° La théorie de Dirac refuse les valeurs négatives de l et de j et ignore en conséquence les ensembles (T_3) et (T_4) de solutions.

2° La mécanique ondulatoire pose $j = l + (1/2)$ ou $j = l - (1/2)$ suivant que le spin est parallèle ou antiparallèle à la direction d'un moment défini comme moment orbital. Par contre, la théorie de D. Hestenes définit en chaque point une vitesse d'espace pour un état stationnaire de telle sorte que l'on peut définir en chaque point le moment de cette vitesse par rapport à l'origine, et ce moment est toujours de sens contraire au spin.

3° L'existence des ensembles (T_3) et (T_4) de solutions montre que l'équation de Dirac-Hestenes est aussi relative à un atome d'antihydrogène de telle sorte que la solution générale ($\beta \neq 0, \pi$) doit être relative à un mélange de ces deux atomes.

Plus généralement, à côté d'un atome hydrogénoïde de rang atomique Q il devrait exister un antiatome très instable dont le noyau a pour charge Qe^- et agit sur un positon périphérique.

(*) Séance du 25 mai 1970.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Moments cinétiques et magnétiques en théorie de Dirac-Hestenes*. Note (*) de M. GASTON CASANOVA, présentée par M. André Lichnerowicz.

L'approximation non relativiste en théorie de Dirac-Hestenes permet d'établir une « quantification dans l'espace » à partir des solutions planes ($\beta = 0$) ainsi que la règle de Stoner. L'étude de l'action d'un champ magnétique suffisamment faible montre que le magnétisme propre n'intervient pas dans les variations de l'énergie, ce qui permet d'établir la formule de Landé.

Soient les solutions planes, dans $z = 0$, définies par

$$(1) \quad \psi = L \exp i \sigma_3 E x_0$$

où

$$L = M + iN = r^{\frac{1}{2}} (G + i \sigma_3 u F) = \rho^{\frac{1}{2}} \left(\exp - \frac{1}{2} \nu \varphi \right) \exp i \sigma_3 j \theta,$$

avec

$$u = \sigma_1 \cos \theta + \sigma_2 \sin \theta, \quad \nu = -\sigma_1 \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta.$$

On a posé $r^{1/2} G = \rho^{1/2} \operatorname{ch} 1/2 \varphi$, $r^{1/2} F = \rho^{1/2} \operatorname{sh} 1/2 \varphi$ et donc $F = G \operatorname{th} 1/2 \varphi$.

1. A partir du vecteur courant

$$J_0 = \rho e_0 = \rho \left(\exp - \frac{1}{2} \nu \varphi \right) \gamma_0 \exp \frac{1}{2} \nu \varphi = \rho \gamma_0 \operatorname{ch} \varphi - \rho \nu \gamma_0 \operatorname{sh} \varphi$$

on définit la vitesse réduite d'espace $w = -\rho \nu \operatorname{th} \varphi$, ainsi que le moment cinétique orbital :

$$\delta = \rho m_0 r u \times w c = \rho m_0 r i u \nu c = -\rho m_0 r c \sigma_3 \operatorname{th} \varphi = -2 m_0 c r^2 \frac{G^2 - F^2}{G^2 + F^2} F G \sigma_3,$$

où m_0 est la masse propre en C. G. S. telle que $m = 2 \pi m_0 c / h$.

Or, dans l'atome, le rapport F/G est petit puisque de l'ordre de la constante α de structure fine, de telle sorte que l'on peut négliger F^2 devant G^2 et écrire :

$$(2) \quad \delta = -2 m_0 c r^2 F G \sigma_3.$$

Ce moment ne dépend que de r , par suite de la symétrie du champ du noyau. On considérera en conséquence que, dans l'atome, ρ représente, non pas la probabilité de trouver en un point un négaton, mais la probabilité de trouver une orbite de rayon r sur laquelle est répartie uniformément la charge e^- et la masse m_0 , façon de voir qui est bien en accord avec l'idée qu'un négaton en mouvement relatif est un phénomène étendu. En conséquence la densité ponctuelle de présence sera $\rho / 2 \pi r$ et la condition de normalisation deviendra, par intégration dans tout le plan (r, θ) ,

$$1 = \iint \frac{\rho}{2 \pi r} r dr d\theta = \int_0^{+\infty} \rho dr = \int_0^{+\infty} r G^2 dr,$$

(2)

tandis que la densité ponctuelle de moment cinétique $\partial/2\pi r$, intégrée dans tout le plan, définira le moment cinétique orbital x :

$$(3) \quad x = -2m_0 c \int_0^{+\infty} r^2 FG dr \sigma_3.$$

Pour le calculer, on écrit les deux équations de la théorie de Dirac où les coefficients de G/r et de F/r sont respectivement $-(j-1/2)$ et $j+3/2$ et l'on obtient aisément

$$(4) \quad 2m \int_0^{+\infty} r^2 FG dr = j + \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad x = -m_0 \frac{c}{m} \left(j + \frac{1}{2}\right) \sigma_3 = -\hbar \left(j + \frac{1}{2}\right) \sigma_3.$$

Comme le spin est $1/2 \hbar \sigma_3$, on définit le moment cinétique total χ :

$$(5) \quad \chi = x + S = -\hbar j \sigma_3.$$

Pour la solution (1), x et S sont de sens contraires mais il existe des solutions de l'équation de Dirac-Hestenes pour lesquelles x et S sont de même sens, toutes les grandeurs de champ étant inchangées. Il en est ainsi lorsque l'on change j en $-(j+1)$ dans (1), ce qui laisse également invariants les niveaux d'énergie puisque $j+1/2$ est changé en $-(j+1/2)$, de telle sorte que x change de signe et que le moment cinétique total devient χ' :

$$(6) \quad \chi' = -x + S = \hbar(j+1) \sigma_3.$$

2. La direction σ_3 étant arbitraire, on la notera σ dans l'équation de Dirac-Hestenes comme dans (4) et (5). Si, maintenant, σ_3 est une direction distinguée, les moments $-\hbar j \sigma$ et $\hbar(j+1) \sigma$, pris par rapport à σ_3 , sont respectivement $-\hbar j \cos \alpha \sigma_3$ et $\hbar(j+1) \cos \alpha' \sigma_3$, si α, α' est l'angle (σ, σ_3) .

Ces moments sur σ_3 doivent coïncider avec ceux que l'on obtient à partir des solutions (1) où j est remplacé par m' ou m'' , c'est-à-dire être de la forme $-m' \hbar \sigma_3$ ou $(m''+1) \hbar \sigma_3$ où m' et m'' sont, comme j , des entiers positifs ou nuls augmentés de $1/2$. D'où l'existence de directions privilégiées de plans $P(\alpha)$ et $P'(\alpha')$ définies respectivement par

$$(7) \quad \cos \alpha = \frac{m'}{j}$$

et

$$(8) \quad \cos \alpha' = \frac{m''+1}{j+1}.$$

Comme $\sigma' = -\sigma$ est aussi une direction possible de σ , les doubles signes doivent s'introduire aux seconds membres de (7) et de (8) de telle sorte que, si m' et m'' désignent désormais des nombres relatifs, (8) doit s'écrire sous les formes

$$(9) \quad \cos \alpha' = \frac{m''+1}{j+1} \quad \text{si } m'' > 0$$

et

$$(10) \quad \cos \alpha' = \frac{m''-1}{j+1} \quad \text{si } m'' < 0.$$

(3)

Les conditions d'existence des cosinus sont évidemment $|m'|, |m''| \leq j$, ce qui équivaut à la règle de Stoner.

Deux plans $P(\alpha)$ d'une part et $P'(\alpha')$ d'autre part sont équivalents s'ils peuvent se confondre dans une rotation autour de σ_3 , et on ne considérera désormais que les ensembles quotients $p(\alpha)$ et $p'(\alpha')$.

Deux plans $p(\alpha)$ et $p'(\alpha')$ seront confondus pour une même valeur de l obtenue en posant $j = l + 1/2$ dans (7) et $j = l - 1/2$ dans (9) et (10) et si, en outre, $m'' = m' - 1$ pour m'' positif ou $m'' = m' + 1$ pour m'' négatif.

Les formules (7), (9) et (10) se confondent alors dans l'unique formule

$$(11) \quad \cos \alpha = \frac{m'}{l + \frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad |m'| \leq j,$$

qui définit un ensemble $q(\alpha)$ de plans dans lesquels il y a toujours deux solutions de spins opposés et, presque toujours, deux seulement. Seul le plan $z = 0$, obtenu pour $l \neq 0$ par $m', m'' = \pm j$, contient quatre solutions avec seulement deux directions opposées de spin. Pour $l = 0$, la solution $j = -1/2$ étant inadmissible, il ne reste que les solutions (7) avec $m' = 1/2$ et $m' = -1/2$. Ces deux solutions dans $z = 0$ ont des spins opposés mais elles sont du même type (7), c'est-à-dire que le spin est toujours opposé au moment cinétique.

Le choix d'une seconde direction distinguée non parallèle à σ_3 conduirait évidemment à des contradictions. On posera $m' = \pm \mu - 1/2$, μ étant le quantum magnétique.

3. Soit l'équation (12) de Dirac-Hestenes :

$$(12) \quad \square \psi = (m \psi \gamma_0 + e A \psi) i \sigma_3,$$

où ψ désigne la solution (1), le champ étant toujours celui du noyau, et le potentiel $A_1 = -1/2 y H$, $A_2 = 1/2 x H$, $A_3 = 0$, où H est un réel constant.

De

$$H = -i \nabla \wedge (A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2) = -i \nabla \wedge \frac{1}{2} r \nu H,$$

on déduit

$$\vec{H} = \sigma_3 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) = H \sigma_3.$$

On introduira donc ce champ perturbateur en ajoutant $1/2 e r \nu H \psi i \sigma_3$ au second membre de (12).

Nous supposons maintenant que H est suffisamment petit pour que les produits $H \theta \varphi$ puissent être négligés. Ceci étant, nous allons montrer que

$$(13) \quad \psi_1 = \psi \exp - e r^2 \frac{H}{4}$$

est une solution de l'équation perturbée, sous les conditions précédentes. De

$$\gamma_0 \square \psi_1 = - u e r \frac{H}{2} \left(\exp - e r^2 \frac{H}{4} \right) \psi + \exp - e r^2 \frac{H}{4} \gamma_0 \square \psi$$

(4)

et du fait que ψ vérifie (12) on déduit

$$(14) \quad -\frac{1}{2} u e r H \left(\exp - e r^2 \frac{H}{4} \right) \psi = \frac{1}{2} e r v H \left(\exp - e r^2 \frac{H}{4} \right) \psi i \sigma_3,$$

et cette condition s'écrit :

$$-\frac{1}{2} \rho u r H = \frac{1}{2} r v H \psi i \sigma_3 \tilde{\psi} = \frac{1}{2} r H i v \rho \sigma_3 \exp v \varphi,$$

soit

$$\frac{1}{2} u r H = \frac{1}{2} u r H' \operatorname{ch} \varphi + \frac{1}{2} r H i \sigma_3 \operatorname{sh} \varphi,$$

ce qui est vérifié à l'approximation du premier ordre ici envisagée.

Cette multiplication (13) de ψ par un scalaire ne modifie que la probabilité, c'est-à-dire que la condition de normalisation qui peut toujours être satisfaite si l'on suppose que H n'agit que dans un domaine fini du plan $z = 0$. En conséquence la vitesse d'univers dans le système propre n'est pas modifiée ainsi que, par conséquent, l'énergie propre; cette conservation de l'énergie implique que l'interaction champ-moment magnétique propre n'intervienne pas dans la variation d'énergie introduite par le champ H , de telle sorte que seul le moment magnétique $\mathcal{M}$ d'origine orbitale doit être pris en considération dans cette variation. Or, selon un théorème classique,

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \frac{e \hbar}{m_0 c} z = B \left(j + \frac{1}{2} \right) \sigma_3,$$

B étant le magnéton de Bohr.

Si $\vec{H}$ est oblique sur $z = 0$, il se décompose suivant $H \sigma_3 \cos \alpha$ et une composante sur $z = 0$ qui exerce une force normale à $z = 0$ sur la charge e^- répartie sur l'orbite, mais nous supposons H assez petit pour que le plan de l'orbite stationnaire n'en soit pas modifié. De plus, comme cette composante est normale à $\mathcal{M}$ et à σ , elle n'introduit aucune variation d'énergie. Celle-ci est seulement :

$$\delta W = -B \left(j + \frac{1}{2} \right) H \cos \alpha.$$

En rapprochant (16) et (11) on obtient la formule de Landé.

Nous remarquons enfin que nous avons déjà rencontré une situation analogue ⁽¹⁾ dans l'étude du mouvement d'un flux de négatons libres rencontrant un champ magnétique constant, mais non nécessairement faible, colinéaire au spin. La vitesse d'univers étant conservée, la conservation d'énergie dans le système propre impliquait qu'il n'y avait pas de variation d'énergie dans l'interaction moment magnétique propre-champ, mais seulement une nouvelle répartition des négatons dans le plan d'onde, qui était un effet de spin.

(*) Séance du 12 octobre 1970.

(1) G. CASANOVA, *Comptes rendus*, 267, série B, 1968, p. 661 et 674.

(6, avenue Paul-Appell, 75-Paris, 14^e.)

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

QUAI SAINT BERNARD - PARIS V

SERVICE DE LA SCOLARITÉ

Bureau des Enseignements du 3^e Cycle

TÉLÉPHONE : 336-95-25 - P

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : D'ÉTAT

THÈSE DE : ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

NOM : CASANOVA

Prénoms : Gaston

Né (e) le 14 Juillet 1913 à Paris Dép^t Seine

SUJETS

1^{ère} THÈSE : Invariance et détermination du réel physique en relativité
restreinte et en théorie de Dirac-Hestenes.

2^e THÈSE (Propositions faites par la Faculté) :

Vu et approuvé

Paris, le 31 Décembre 1970

Le Doyen de la Faculté
des Sciences de Paris

Vu et permis d'imprimer

Paris, le

Le Recteur de l'Académie
de Paris



L. Gauthier

ERRATA

- Page 10, ligne 21 (à droite) son (et non un)
Page 13, ligne 15 : $\vec{s} (s_x, \dots)$; Page 14, ligne 12 : ajouter Ω ; 23 : $-\Omega$.
Page 21, ligne 14 : $\vec{\gamma}$; Page 28, ligne 16 : $\vec{r}$
Page 30, ligne 6 : $|\Delta x p_x|$, $|\Delta y p_y|$, $|\Delta z p_z|$, $|c^2 m \Delta t|$
Page 33, ligne 21 : les q_i ; Page 39, ligne 23 : $\bar{\Omega}'$
Page 44, ligne 9 : $\vec{e} = -\bar{\Omega} \vec{\sigma}_3$
Page 48, ligne 12 : V_n , ligne 13 : 1-vecteur , ligne 20 : 1 (et non l)
Page 49, ligne 17 : $V_n^{(o)}$ (au milieu, et non $V_n^{(e)}$)
Page 50, ligne 13 : $A_p \wedge B_q$; Page 52, ligne 3 : $-i(a.(bxc))$
Page 54, ligne 2 : $(a^{o2}) + (a')^2$
Page 55, ligne 11 : = o (ajouter le o) ; Page 56, dernière ligne : $R\bar{R}$
Page 58, ligne 15 : satisfait, ligne 22 : $\vec{a}$, bas de page : référons
Page 61, ligne 12 : dont (et non dans)
Page 63, ligne 5 : a_{4mi} (et non ∂_{4mi}), ligne 6 : a_4 (et non ∂_4)
Page 65, ligne 20 : on obtient
Page 66, ligne 24 : ψ_I et non ψ_P
Page 67, ligne 25 : Hestenes
Page 69, ligne 2 : Invariance, ligne 17 : $-i \vec{\sigma}_3 e \times \vec{u}$ (ajouter $\vec{u}$)
Page 70, ligne 8 : $\rho u \propto \vec{u}$, ligne 23 : $\bar{\Omega}$
Page 72, ligne 26 : et β comme (ajouter β)
Page 74, ligne 32 : $e_i = R_1 \gamma_i R_1$
Page 75, ligne 12 : $e_o (ch \theta \cos \varphi + \dots$
Page 76, ligne 2 : $\exp i \varphi b \rceil R_1$
 avant-dernière ligne : $(iR_o + i \vec{\sigma} JR_o) (i\tilde{R}_o - i\tilde{J}\tilde{R}_o \vec{\sigma})$
Page 77, ligne 20 : pour ρ constant (ajouter ρ)
Page 81, ligne 16 : un (et non une) ; Page 83, ligne 5 : pas de parenthèse
Page 84, ligne 10 : de présence ρ (ajouter le ρ)
 ligne 19 (à la fin) : $-i \vec{\sigma}_3 k.x$
Page 85, ligne 1 (au milieu) : ajouter =
 ligne 14 : $\exp -i \vec{\sigma}_3 k.x$ (et non j,x)
Page 86, ligne 21 : $h v$ (et non h)

